Arithmetische Untersuchungen

über

Irreduktibilität.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen naturwissenschaftlich-mathematischen Fakultät

der

Ruprecht-Karls-Universität zu Heidelberg

vorgelegt von

Kharasoff

Georg Charasoff

aus

Tiflis (Russland).

HEIDELBERG.

Universitäts-Buchdruckerei von J. Hörning.

1902.

Seinem hochgeachteten Lehrer

Herrn

Prof. Dr. Leo Koenigsberger

in Heidelberg

in dankbarer Verehrung gewidmet

vom Verfasser.

Litteratur

auf welche beständig Bezug genommen wird:

(K., I) = L. Koenigsberger, „Ueber den Eisenstein'schen Satz von der Irreduktibilität algebraischer Gleichungen" (Journal für Math., Bd. 115).

(K., II) = L. Koenigsberger, „Ueber die Entwicklungsform der algebraischen Funktionen und die Irreduktibilität algebraischer Gleichungen" (Ib., Bd. 121, Heft 4).

(K., III) = L. Koenigsberger, „Ueber die Irreduktibilität algebraischer Funktionalgleichungen und linearer Differentialgleichungen". Mathematische Annalen Bd. 53.

(K., IV) = L. Koenigsberger, „Ueber die Irreduktibilität algebraischer Differentialgleichungen".

ERSTER TEIL.

Erstes Kapitel.

Ueber die Cyklen algebraischer Funktionalgleichungen.

In diesem Kapitel wird eine sehr einfache Methode zur Bestimmung erster Posten in den Wurzelentwicklungen algebraischer Funktionalgleichungen dargelegt, sowie eine sich aus jener Methode von selbst ergebende allgemeine und ziemlich genaue Lösung der Frage über die Cyklen der betreffenden Gleichungen.

§ 1. Um uns mit einer algebraischen durch die Gleichung

$$F(z,y) = 0$$

definierten Funktion y um den Punkt

$$z = \alpha,$$

für welchen sich die Funktion $F(z,y)$ regulär verhält, vertraut zu machen, setzen wir

$$z - \alpha = x$$

und geben unserer Gleichung die folgende Form:

$$R(y)_n \equiv R_n y^n + \ldots + R_k y^k + R_0 = 0,$$

worin die R_i endliche oder unendliche Maclaurin'sche Reihen sein müssen. Alle denkbaren Quotienten solcher Reihen bilden einen Körper, welchen wir bleibend durch das Symbol $\Omega(x)$ repräsentieren wollen; alle Grössen dieses Körpers haben die Form

$$G = x^{\mu} . E,$$

worin μ eine ganze positive oder negative Zahl, die Ordnung der Grösse G, und E eine Maclaurin'sche Reihe:

$$E = e_0 + e_1 x + \ldots.$$

ist, welche für $x = 0$ nicht Null wird, worin also $e_0 \neq 0$. Die Reihen E von letzterer Beschaffenheit nennen wir Einheiten, die Grössen

$$G = x^{\mu}. E$$

von nicht negativer Ordnung (d. i., für welche $\mu \geqq 0$) — ganze Zahlen, die Grössen G von negativer Ordnung ($\mu < 0$) — gebrochene Zahlen des Körpers Ω (x).

Die Wurzeln einer Gleichung $R(x)_n = 0$ sollen algebraische Zahlen des Körpers Ω (x) heissen und in dem besonderen Falle, wo R_0, R_n Einheiten des Körpers Ω (x), die übrigen R_i nicht gebrochene Zahlen dieses Körpers sind, nennen wir diese Wurzeln algebraische Einheiten des Körpers Ω (x).

Wir entlehnen nun der Funktionentheorie den folgenden Satz:

„Eine jede algebraische Zahl y des Körpers Ω (x) ist immer von der Form

$$x^{\pm \frac{\varrho}{\mu}}. E,$$

wobei ϱ, μ natürliche Zahlen, E eine algebraische Einheit des Körpers Ω (x) bedeutet".

Die Zahl $\pm \frac{\varrho}{\mu}$ soll Ordnung der algebraischen Zahl y heissen, und die Grösse y selbst — eine algebraische ganze oder gebrochene Zahl — je nach dem Vorzeichen bei $\frac{\varrho}{\mu}$.

§ 2. Es ist weiter aus der Funktionentheorie bekannt, dass eine Gleichung:

$$R_n(y) = 0,$$

wenn sie Wurzeln von der Ordnuug $\pm \frac{\varrho'}{\mu'}$ besitzt, wobei ϱ', μ' ohne gemeinsamen Teiler vorausgesetzt sind, $\varepsilon . \mu'$ solche Wurzeln haben muss (ε ist eine natürliche Zahl),

und dass sich diese Wurzeln in Cyklen von den Ordnungen $\varepsilon_i \mu'$, bei $\Sigma \varepsilon_i = \varepsilon$ anordnen.

Seien nun μ_1 Wurzeln einer vorgelegten Gleichung $R_n(y) = 0$ von der Ordnung $-\frac{\varrho_1}{\mu_1}$, μ_2 Wurzeln von der Ordnung $-\frac{\varrho_2}{\mu_2}, \ldots\ldots, \mu_k$ von der Ordnung $-\frac{\varrho_k}{\mu_k}$, μ_{k+1} von der Ordnung $\frac{\varrho_{k+1}}{\mu_{k+1}} = 0, \ldots\ldots$, endlich μ_q von der Ordnung $\frac{\varrho_q}{\mu_q}$, wobei

$$-\frac{\varrho_1}{\mu_1} < -\frac{\varrho_2}{\mu_2} < \ldots . < -\frac{\varrho_k}{\mu_k} < \frac{\varrho_{k+1}}{\mu_{k+1}} = 0 < \frac{\varrho_{k+2}}{\mu_{k+2}} < \ldots\ldots < \frac{\varrho_q}{\mu_q},$$

so zerfällt die Gleichung $R(y)_n = 0$ in dem Körper $\Omega(x)$ sicher in die Gleichungen:

$$M_1 = 0,\ M_2 = 0, \ldots\ldots, M_q = 0,$$

deren Gradzahlen respektive $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_q$ sind. Seien weiter e_i die grössten gemeinschaftlichen Teiler der Zahlen ϱ_i, μ_i, — so dass

$$\varrho_i = e_i \varrho'_i \ ; \ \mu_i = e_i \mu'_i$$

und ϱ'_i, μ'_i relativ prim sind, — dann kann jede Gleichung $M_{\underline{i}_q} = 0$*) noch in Gleichungen $M_{\underline{ij}_q} = 0$ von den Ordnungen $\mu'_{\underline{i}_q}\, e_{\underline{ij}_q}$, bei $\sum_j e_{\underline{ij}_q} = e_{\underline{i}_q}$ zerfallen, so dass dabei jede Gleichung $M_{\underline{ij}_q} = 0$ in dem Körper $\Omega(x)$ eine irreduktibele ist und einen Cyklus der Zweige der Funktion y bestimmt.

Die Frage über die Cyklen der Zweige einer um den Punkt $z - \alpha = x$ algebraischen Funktion y hängt also wesentlich mit der Frage über die wirklichen Werte von e_i, ϱ_i, μ_i für diesen Punkt $x = z - \alpha$ zusammen. Diese Grössen ϱ_i, μ_i, e_i sind aber sehr leicht zu ermitteln, wie wir uns bald überzeugen werden. Es mag nur an dieser

---

*) Das Zeichen $\underline{i}_q$ soll hier dieselbe Bedeutung haben, wie das sonst übliche, aber zu weitläufige Symbol ($i = 1, 2, \ldots, q$).

Stelle bemerkt werden, dass wir bei ihrer Ermittlung auf den Inhalt dieses Paragraphen niemals Bezug nehmen werden, dessen Bedeutung also nicht darin besteht, die Ausgangspunkte folgender Demonstrationen anzugeben, sondern lediglich darin, dass dem Leser die Möglichkeit gegeben wird, nach der Auseinandersetzung des Standpunktes, von dem aus die Frage gewöhnlich betrachtet wird, die folgenden Resultate in die Sprache der in der Funktionentheorie üblichen Begriffe zu übertragen.

§ 3. Es sei

$$r_n, r_{n+1}, \ldots, r_1, r_0 = (r)_n$$

eine Reihe beliebiger rationaler Zahlen und $r_{u_1} = t_1$ (von links nach rechts genommen) die erste Grösse dieser Reihe, die kleiner ist als $r_n = t_0$; sodann $r_{u_2} = t_2$ die erste Grösse, die kleiner ist als t_1, und so fort bis auf $r_{u_s} = t_s =$ min. $(r_n, r_{n-1}, \ldots, r_0)$. Die so definierten Zahlen

$$r_n = t_0, t_1, \ldots\ldots, t_s \ldots\ldots (\mathbf{t})$$

sollen Hauptzahlen der Reihe $(r)_n$ und die ihnen entsprechenden Indices

$$n = u_0, u_1, \ldots\ldots, u_s \ldots\ldots (\mathbf{u})$$

Hauptindices der Reihe $(r)_n$ heissen. Beide Reihen (**t**) und (**u**) sind überall abnehmende. Alle möglichen Systeme (r) von rationalen Zahlen werden in Klassen

$$\begin{pmatrix} t_0, t_1, \ldots, t_s \\ u_0, u_1, \ldots, u_s \end{pmatrix}$$

nach den Grössen der Hauptzahlen und Hauptindices geteilt.

Es ist ersichtlich, dass die Hauptzahlen t_j einer Reihe $(r)_n$ die folgende Eigenschaft besitzen:

$$\text{min. } (r_n, r_{n-1}, \ldots, r_k) = t_j,$$

wenn t_j die letzte Hauptzahl der Reihe $(r)_k$ ist.

Ein System $(r)_n$ soll monominimal, resp. monomaximal heissen, wenn es darin nur eine Grösse r_k giebt, die kleiner, resp. grösser als alle übrigen ist; nicht monominimale (monomaximale) Systeme nennen wir polyminimal (polymaximal).

§ 4. Es seien die Koeffizienten $R_j = x^{r_j} . E_j$ einer Gleichung $R(y)_n = 0$ von den Ordnungen $r_j \geqq 0$; setzen wir $y = u + \alpha$, worin u eine neue Variabele, α eine Konstante bedeutet, so geht unsere Gleichung in y in die folgende in u über:

$$P(u)_n = P_n u^n + \ldots + P_k u^k + \ldots + P_0 = 0,$$

worin

$$P_k = \frac{R^{(k)}(\alpha)_n}{k!} = \sum_{q=k}^{q=n} \frac{q!\, \alpha^{q-k} R_q}{k!\,(q-k)!},$$

und die Ordnung p_k des Koeffizienten P_k ist folgendermassen bestimmt:

$p_k = r_k = \min. (r_n, r_{n-1}, \ldots, r_k)$, wenn r_k eine Hauptzahl der Reihe $(r_n, \ldots, r_0)$ ist, die Reihe selbst also eine monominimale.

$p_k \geqq \min. (r_n, r_{n-1}, \ldots, r_k)$ in den übrigen Fällen.

Da die Funktionen $R(y)_n$, $P(u)_n$ in Bezug auf ihre Zerlegungsart vollkommen äquivalent sind, so deutet das soeben gewonnene Resultat auf einen in Bezug auf die Reduktibilitätsfrage der Funktion $R(y)_n$ invarianten Charakter der Hauptzahlen und Hauptindices der Reihe $r_n, r_{n-1}, \ldots, r_0$ hin. Es ist übrigens klar, dass dieselben Betrachtungen auch für Funktionen $R(y)_n$ gelten, deren Koeffizienten R_j ganze Zahlen eines beliebigen Körpers Ω sind, während x eine Primzahl dieses Körpers bedeutet. Es gilt aber der Schluss in gewisser, leicht zu begreifenden Modifikation auch für homogene lineare Differentialgleichungen:

$$x^n R_n y^{(n)} + \ldots + x^k R_k y^{(k)} + \ldots + x^0 R_0 y^{(0)} = 0,$$

wovon man sich durch Ausführung der Substitution

$$y = u\, x^{\alpha}$$

überzeugt, nach welcher die Differentialgleichung die Form annimmt:

$$\sum_k x^k P_k u^{(k)} = 0,$$

$$\text{bei} \quad P_k = \Sigma \frac{q!\, (\alpha)^{q-k} R_q}{k!\,(q-k)!}$$

$$\text{und} \quad (\alpha)^i = (\alpha - 1)(\alpha - 2) \ldots (\alpha - i + 1)\,^{*})$$

*) Vergl. (K., III, 17).

Die soeben angedeutete Invarianteneigenschaft der Hauptzahlen und Hauptindices der Reihe $(r)_n$ wird im Laufe unserer Arbeit erschöpfend erörtert werden; vorläufig bemerken wir noch Folgendes.

Wir werden die Hauptzahlen und Hauptindices der Reihe $(r)_n$, durch welche die Ordnungen der Koeffizienten R_j in der Funktion $R\,(y)_n$ angegeben werden, oft auch Hauptzahlen und Hauptindices der Funktion $R\,(y)_n$ selbst oder der Gleichung $R\,(y)_n = 0$ nennen und alle solche Funktionen und Gleichungen auf Grund ihrer Hauptzahlen und Hauptindices in Klassen

$$\begin{pmatrix} t_0, t_1, \ldots, t_s \\ u_0, u_1, \ldots, u_s \end{pmatrix}$$

einteilen.

Sei
$$R\,(y, x) \equiv \sum_{i=0}^{i=n} R_{ij}\, y^i\, x^j$$

eine ganze Funktion n^{ten} Grades in y und eines beliebigen Grades in x, und sei $R_{n, t_0}\, y^n\, x^{t_0}$ der Posten mit der höchsten Potenz von y verbunden mit der niedrigst möglichen Potenz von x, dann ist t_0 die erste Hauptzahl der Funktion und $n = u_0$ der zu ihr gehörige Index; sei weiter $R_{u_1, t_1}\, y^{u_1}\, x^{t_1}$ der Posten, welcher dadurch bestimmt ist, dass zugleich u_1 so wenig wie möglich kleiner als $n = u_0$ und t_1 so viel wie möglich kleiner als t_0 ist; dann ist t_1 die zweite Hauptzahl und u_1 der zweite Hauptindex der Funktion $R\,(y, x)$ und s. f.

Im Falle einer Funktionalgleichung $R\,(y, x) = 0$ können wir weiter stets annehmen, dass ihre kleinste Hauptzahl, d. i. die kleinste Ordnung (in x) ihrer Koeffizienten R_j bei Potenzen von y — gleich Null ist. Entwickeln wir nun diese Gleichung nach Potenzen von x:

$$R_{y0} + R_{y1}\, x + \ldots + R_{yt}\, x^t + \ldots = 0,$$

worin

$$R_{yt} = R_{0t} + R_{1t}\, y + \ldots + R_{nt}\, y^n$$

ist, so ist der Grad von R_{y0} in y, wie leicht zu sehen, gleich u_s, gleich dem Hauptindex der Hauptzahl $t_s = 0$; ist dann 1 kein Hauptindex unserer Gleichung, so ist der

Grad von R_{y_1} in y nur insofern bestimmt, als er nicht grösser als t_s sein kann, und so geht es fort, bis wir zur Funktion $R_{y_1 t_{s-1}}$ kommen, deren Grad in y genau gleich u_{s-1} ist, und so weiter, bis auf die Funktion $R_{y t_0}$, deren Grad den Grad n der Gleichung $R(y, x) = 0$ in y erreichen wird. Aus diesen Betrachtungen ziehen wir den folgenden Schluss, welcher uns später sehr nützlich sein wird:

I. „Haben zwei Gleichungen

$$R(y, x) = 0, \quad P(y, x) = 0$$

nach Potenzen von x entwickelt:

$$\begin{aligned} R_{y0} + R_{y1}\,x + \ldots + R_{yt}\,x^t + \ldots\ldots &= 0 \\ P_{y0} + P_{y1}\,x + \ldots + P_{yt}\,x^t + \ldots\ldots &= 0 \end{aligned}$$

die gemeinsame Eigenschaft, dass die Koeffizienten R_{yt}, P_{yt} bei den gleichen Potenzen von x Polynome von gleichem Grade in y sind, so gehören diese beiden Gleichungen zu einer und derselben Klasse

$$\begin{pmatrix} t_0, t_1, \ldots, t_s \\ u_0, u_1, \ldots, u_s \end{pmatrix}\text{“.}$$

§ 5. Setzen wir $y = x^{-e}.\,u$ in die Gleichung

$$R(y)_n \equiv R_n y^n + .. + R_0 \equiv x^{r_n} E_n y^n + \ldots + x^{r_0} E_0 = 0 \ldots (Y)$$

ein, so geht sie in eine Gleichung in u über:

$$x^{r_n - en} E_n u^n + .. + x^{r_k - ek} E_k u^k + \ldots + x^{r_0 - e.0} E_0 = 0 \ldots (\mathrm{u}).$$

Die Zahlenreihe

$$r_n - en; \quad \ldots . r_k - ek; \quad \ldots . r_0 - e.0$$

ist bei genug grossem e eine überall steigende, darum monominimale, und zwar so, dass

$$r_n - en < r_k - ek \quad (k = n - 1, \ldots , 1, 0),$$

dass also, wenn wir $x = 0$ in die Gleichung (u) einsetzen, alle ihre Wurzeln (u) bei diesem Werte von x gleich Null werden. Lassen wir nun e stetig abnehmen, so kommt sicher der Augenblick, wo das erste Glied $r_n - en$ der Reihe $(r_k - ek)_n$ zwar noch das kleinste von allen, jedoch

auch mindestens einem der ihm folgenden Glieder gleich sein wird, so dass

$$r_n - en \leqq r_k - ek \quad (k = n - 1, \ldots, 1, 0) \ldots (\mathbf{e}),$$

und bei diesem Werte von e werden einige Wurzeln der Gleichung (**u**) noch gleich Null für $x = 0$, die übrigen Wurzeln aber endlich und von Null verschieden. Es ist daher dieser Wert von e kein anderer, als $\frac{\varrho_1}{\mu_1}$.

Den Bedingungen (**e**) kann man aber eine einfachere Form geben; denn ist r_k eine Hauptzahl der Reihe $(r)_n$, sind aber $r_{k-1}, r_{k-2}, \ldots, r_{k-\alpha}$ keine Hauptzahlen, so ist

$$r_k \lneqq r_{k-\frac{i}{\alpha}},$$

um so mehr also

$$r_k - ek \leqq r_{k-\frac{i}{\alpha}} - e\left(k - \frac{i}{\alpha}\right),$$

woraus folgt, dass die Bedingungen

$$t_0 - eu_0 \leqq t_{\frac{i}{s}} - e. u_{\frac{i}{s}} \qquad (t_0 = r_n, u_0 = n)$$

den Bedingungen (**e**) vollständig äquivalent sind, und wir erhalten

$$\frac{\varrho_1}{\mu_1} = \max. \left(\frac{t_0 - t_{\frac{i}{s}}}{u_0 - u_{\frac{i}{s}}}\right).$$

Sei jetzt t_{i_1} die Hauptzahl mit dem grössten Hauptindex, für welche noch

$$\frac{\varrho_1}{\mu_1} = \max. \left(\frac{t_0 - t_{\frac{i}{s}}}{u_0 - u_{\frac{i}{s}}}\right) = \frac{t_0 - t_{i_1}}{u_0 - u_{i_1}}$$

ist, so behaupte ich:

$$\underline{\varrho_1 = t_0 - t_{i_1}\,;\ \mu_1 = u_0 - u_{i_1}.}$$

Dies ist aus der einfachen Thatsache ersichtlich, dass die Gleichung (**u**) bei

$$e = \frac{\varrho_1}{\mu_1} = \max. \left(\frac{t_0 - t_{\frac{i}{s}}}{u_0 - u_{\frac{i}{s}}}\right)$$

und bei $x = 0$ genau u_{i_1} unendlich kleine und $u_0 - u_{i_1}$ endliche Lösungen besitzt, dass also $\mu_1 = u_0 - u_{i_1}$ sein muss.

Jetzt verfahren wir mit der Reihe

$$t_{i_1} - eu_{i_1}, \ldots\ldots, t_s - eu_s$$

ebenso wie oben mit der Reihe

$$t_0 - eu_0, \ldots\ldots, t_s - eu_s$$

und bestimmen

$$\frac{\varrho_2}{\mu_2} = \max.\left(\frac{t_{i_1} - t_i}{u_{i_1} - u_i}\right) \qquad s > i > i_1 .$$

Ist t_2 die Hauptzahl mit dem grössten Index, für welche noch

$$\frac{\varrho_2}{\mu_2} = \frac{t_{i_1} - t_{i_2}}{u_{i_1} - u_{i_2}} = \max.\left(\frac{t_{i_1} - t_i}{u_{i_1} - u_i}\right),$$

so ist

$$\underline{\varrho_2 = t_{i_1} - t_{i_2}\,;\ \mu_2 = u_{i_1} - u_{i_2}\,,}$$

und so fort, bis endlich

$$\varrho_k = t_{i_{k-1}} - t_{i_k}\ ;\ \mu_k = u_{i_{k-1}} - u_k$$

auf dieselbe Art bestimmt wird; dabei soll

$$t_{i_k} = t_s,\ u_{i_k} = u_s$$

sein, d. h. die Reihe der Hauptzahlen unserer Gleichung wird durch die successive Ermittlung negativer Ordnungen ihrer Wurzeln erschöpft werden. Denn es ist klar, dass die Gleichung (Y) genau $n - u_s$ Wurzeln von negativer Ordnung hat, dass also

$$\mu_1 + \ldots + \mu_k = (u_0 - u_{i_1}) + \ldots + (u_{i_{k-1}} - u_{i_k}) = n - u_s,$$
$$\text{oder}\quad n - u_{i_k} = n - u_s$$

sein muss, woraus $u_{i_k} = u_s$ folgt.

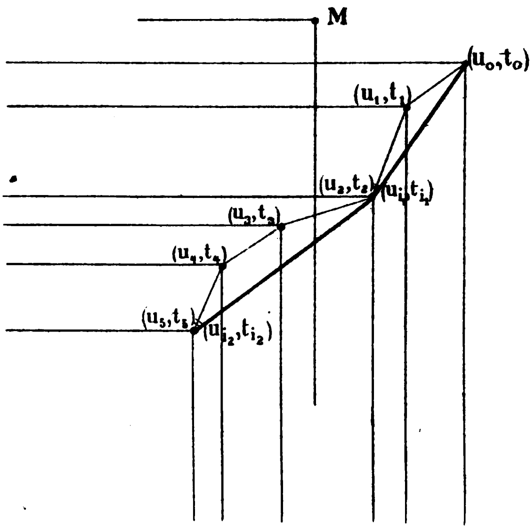
Um für die übrigen u_s Zweige der Funktion y ihre Ordnnngen zu bestimmen, lassen wir e von $-\frac{\varrho_k}{\mu_k}$ an weiter abnehmen; oder wir können die Substitution $y = \frac{1}{z}$ auf unsere Gleichung anwenden und $\frac{\varrho_{k+i}}{\mu_{k+i}}$ aus den Hauptzahlen

und Hauptindices der inversen Reihe $r_0, r_1 \ldots, r_n$ nach der oben skizzierten Methode ermitteln. Endlich kann auch die Substitution $y = z . x^{\varepsilon}$ angewandt werden, worin ε eine ganze Zahl von der Beschaffenheit ist, dass

$$r_0 = \min. \left(\frac{r_k}{n} + \varepsilon \frac{k}{n}\right).$$

Kurz und gut, die Grössen $\varrho_{\frac{i}{q}}, \mu_{\frac{i}{q}}, e_{\frac{i}{q}}$ sind sehr leicht (durch Rechnung) zu bestimmen und damit auch die Gradzahlen $\mu_{\frac{i}{q}} = e_{\frac{i}{q}} \mu'_{\frac{i}{q}}$ der Gleichungen $M_{\frac{i}{q}} = 0$. Zugleich ist auch der Satz des zweiten Paragraphen bewiesen.

Es ist allgemein bekannt, wie man die Grössen $\frac{\varrho_i}{\mu_i}$ mittels des Newton'schen Parallelogrammes bestimmen kann. Durch die Einführung der Begriffe von Hauptzahlen und Hauptindices wird die Konstruktion nur vereinfacht.



Die Punkte (u_j, t_j), die den Hauptindices und Hauptzahlen entsprechen, sind Spitzen der Rechtecke, welche durch die Koordinaten dieser Punkte und die Koordinaten-

axen bestimmt sind und welche alle eins in dem anderen liegen. Es ist aus der Figur sofort klar, dass der Punkt $M = (r_q, q)$, wobei z. B. $r_q > t_0 = r_n$, $q < u_0 = n$ ist, zweifelsohne zwischen den Seiten des Parallelogrammes (u_0, t_0), $(u_1, t_1), \ldots$ und der Y-Axe liegen muss; darum bildet die krumme Linie $(u_0, t_0), (u_1, t_1), \ldots\ldots$, welche die den Hauptindices und Hauptzahlen entsprechenden Punkte (u_i, t_i) verbindet, die erste Annäherung des Newton'schen Diagrammas. Aus der Zeichnung kann man verschiedene Methoden der Bestimmung von $\frac{\varrho_i}{\mu_i}$ durch Rechnung ablesen; jedoch führt in jedem Falle eine unmittelbare Anschauung der Figur am schnellsten zum Ziel.

§ 6. Die soeben bestimmten Grössen $\pm \frac{\varrho_i}{\mu_i}$ $(i:q)$ sind augenscheinlich nichts anderes, als die Gradzahlen von x in den ersten Annäherungen der Wurzeln der Gleichung $R(y)_n = 0$. Es ist aber auch leicht, die numerischen Koeffizienten der Potenzen $x^{\pm \frac{\varrho}{\mu}}$ in diesen Annäherungen zu ermitteln.

Erstens bemerken wir Folgendes in Bezug auf die Hauptindices $u_0, u_{i_1}, \ldots, u_s$; durch diese wird die Gleichung

$$R(y)_n \equiv R_n y^n + \ldots + R_{u_{i_1}} y^{u_{i_1}} + \ldots + R_{u_{i_2}} y^{u_{i_2}} + \ldots + R_0 = 0$$

in Abschnitte geteilt, deren Bedeutung aus all dem Vorigen klar ist; es gilt nämlich der folgende Satz:

II. „Die ersten Annäherungen der Zweige y_i, deren Ordnungen gleich $-\frac{\varrho_j}{\mu_j}$ sind, sind zugleich auch die ersten Annäherungen der Wurzeln der folgenden Gleichung:

$$R_j(y) \equiv \frac{R_{u_{ij-1}} y^{u_{ij-1}} + \ldots + R_{u_{ij}} y^{u_{ij}}}{y^{u_{ij-1} - u_{ij}}} = 0\text{“}.$$

Alle Wurzeln der Gleichung $R_j(y) = 0$ sind von einer und derselben Ordnung und auf diesen Fall also wird der allgemeinere zurückgeführt.

Wir können uns jetzt auf die Ermittlung erster Koeffizienten bei den Wurzelentwicklungen von der $-\frac{\varrho_1}{\mu_1}$ ten

Ordnung beschränken, da genau dieselben Betrachtungen auch im Allgemeinen gelten.

Es seien alle i, bei welchen die Bedingung

$$e = \frac{\varrho_1}{\mu_1} \doteq \max. \left(\frac{t_0 - t_i}{u_0 - u_i}\right) \qquad (i:s)$$

erfüllt ist, successive

$$i = k_1, k_2, \ldots, k_f = i_1,$$

so dass

$$e = \frac{\varrho_1}{\mu_1} = \frac{t_0 - t_{k_1}}{u_0 - u_{k_1}} = \frac{t_0 - t_{k_2}}{u_0 - u_{k_2}} = \ldots = \frac{t_0 - t_{k_f}}{u_0 - u_{k_f}} \ldots (e).$$

Setzen wir (bei diesem Werte von e) $x = 0$ in die Gleichung (u) ein, so erhalten wir

$$E_{no}\, u_0^{\,n} + \ldots + E_{k_1 o}\, u_0^{\,u_{k_1}} + \ldots + E_{k_f o}\, u_0^{\,u_{k_f}} = 0,$$

worin $u_0 = u_{x=0}$, $E_{jo} = E_{j_{x=0}}$ ist, und es ist ohne weiteres klar, dass die gesuchten Koeffizienten sämtlich Wurzeln der numerischen Gleichung

$$E_{no}\, u_0^{\,n - u_{k_f}} + E_{k_1 o}\, u_0^{\,u_{k_1} - u_{k_f}} + \ldots + E_{k_f o} \equiv K(u_0) = 0$$

sind. Es ist aber aus verschiedenen Werten von $e = \frac{\varrho_1}{\mu_1}$ (siehe (e)) sofort zu ersehen, dass die Zahlen

$$u_0 - u_{k_1}, \ldots, u_0 - u_{k_f}$$

alle durch μ'_1 teilbar sind, und es gilt dasselbe auch für ihre Differenzen $u_{k_1} - u_{k_f} = (u_0 - u_{k_f}) - (u_0 - u_{k_1})$.

Wir setzen nun die Werte

$$\alpha = u_0^{\,\mu'_1};\ n - u_{k_f} = e_1 \mu'_1;\ u_{k_1} - u_{k_f} = \delta_1 \mu'_1;\ \ldots u_{k_{f-1}} - u_{k_f} = \delta_{f-1} \cdot \mu'_1$$

in die obige Gleichung $(K(u_0))$ ein; sie wird die Form

$$K(\alpha) \equiv E_{no}\, \alpha^{e_1} + E_{k_1 o}\, \alpha^{\delta_1} + \ldots + E_{k_f o} = 0$$

annehmen. Sind nun $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{e_1}$ die Wurzeln dieser Gleichung, so sind die ersten Annäherungen derjenigen Zweige y_i, welche von der Ordnung $-\frac{\varrho_1}{\mu_1} = -\frac{\varrho'_1}{\mu'_1}$ sind, die folgenden:

$$\alpha_1^{\frac{1}{\mu'_1}} . \vartheta^{\varrho'_1 q} x^{-\frac{\varrho'_1}{\mu'_1}}; \alpha_2^{\frac{1}{\mu'_1}} . \vartheta^{\varrho'_1 q} x^{-\frac{\varrho'_1}{\mu'_1}}; \ldots; \alpha_{e_1}^{\frac{1}{\mu'_1}} . \vartheta^{\varrho'_1 q} x^{-\frac{\varrho'_1}{\mu'_1}}.$$

$$(q = 1, 2, \ldots, e_1),$$

worin ϑ eine primitive $\mu'_1{}^{te}$ Einheitswurzel bedeutet. Sind nun alle α_i von einander verschieden, so haben wir e_1 Cyklen von der Ordnung μ'_1 vor uns. Ist aber beispielsweise $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, so können wir die entsprechenden ersten Annäherungen alle unter die folgende Form bringen:

$$\alpha^{\frac{1}{\mu'_1}} . \Theta^{2\varrho'_1 q} . x^{-\frac{2\varrho'_1}{2\mu'_1}} \quad (q = 1, 2, \ldots, 2\mu'_1),$$

worin Θ eine primitive $2\mu'_1{}^{te}$ Einheitswurzel bedeutet, und in diesem Fall ist es wohl auch möglich, dass die entsprechenden $2\mu'_1$ Zweige nur einen einzigen Cyklus von der Ordnung $2\mu'_1$ bilden. Von dem besonderen Fall also abgesehen, wo die Gleichung $K(\alpha) = 0$ vielfache Wurzeln hat, ist die Frage über die Cyklen unserer Funktion y immer vollkommen aus der Bestimmung der Ordnungen $\pm \frac{\varrho_i}{\mu_i}$ ihrer Zweige nach der oben angegebenen Methode gelöst.

Wir wollen diese Betrachtungen auf eine spezielle Klasse von Gleichungen sofort anwenden.

Sämtliche Wurzeln der Gleichung $R(y)_n = 0$ sind dann und nur dann von derselben Ordnung $-\frac{\varrho}{\mu}$, wenn

$$\frac{r_k}{k} \geqslant \frac{r_n}{n} = \frac{\varrho}{\mu};\; r_0 = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Sind insbesondere alle $r_k > \frac{k . r_n}{n}$, so bestimmen sich die ersten Koeffizienten aller n Wurzelentwicklungen als Wurzeln einer und derselben reinen Gleichung

$$E_{no}\, u_0^n + E_{oo} = 0,$$

und in diesem Falle wollen wir die Gleichung $R(y)_n = 0$ kurz eine Gleichung irreduktiblen Charakters nennen. Da eine reine Gleichung lauter verschiedene Wurzeln hat, so erhalten wir den allgemeinen Satz:

III. „Eine Gleichung irreduktiblen Charakters ist sicher irreduktibel, wenn r_n, n relativ prim sind; ist jedoch der grösste gemeinschaftliche Teiler δ dieser Zahlen grösser als 1, so zerfällt die Gleichung im Körper Ω (x) in δ irreduktible Gleichungen vom $\frac{n}{\delta}^{\text{ten}}$ Grade“.

§ 7. Eine vollkommene Lösung der Frage über die Cyklen einer vorgelegten Gleichung kann stets durch eine endliche Anzahl algebraischer Operationen ermittelt werden, wie es folgende Betrachtungen zeigen.

Wir wollen sagen, dass irgend ein Zweig y_1 der durch die Gleichung $R(y)_n = 0$ definierten Funktion y von ihren übrigen Zweigen $y_2, \ldots, y_n$ getrennt ist, wenn wir in der Berechnung seines Wertes durch Reihenentwicklung (um den Punkt $x = 0$) schon so weit vorgerückt sind, das der Zweig y_1 den berechneten Teil v mit keinem der übrigen Zweige $y_2, y_3, \ldots, y_n$ gemeinsam hat. Ist ausserdem

$$y_1 = u + \omega \qquad \omega = a x^{\frac{\alpha}{\beta}} + b x^{\frac{\gamma}{\delta}} + \ldots,$$

und hat der Zweig y_1 den Teil u seiner Entwicklung noch mit irgend einem der übrigen Zweige $y_2, \ldots, y_n$ gemein, den Teil $v = u + a x^{\frac{\alpha}{\beta}}$ aber schon nicht, so wollen wir den Posten $a \cdot x^{\frac{\alpha}{\beta}}$ in der Reihenentwicklung des Zweiges y_1 seinen trennenden Posten nennen.

Sind nun die Zweige $y_1, y_2, \ldots, y_n$ einer durch die Gleichung $R(y)_n = 0$ gegebenen Funktion y noch nicht vollkommen von einander getrennt, so leuchtet leicht ein, dass man nicht sicher sein kann, ob man die Frage über ihre Cyklen schon gelöst hat oder nicht. Wir wollen aber umgekehrt zeigen, dass man mit der Ermittlung der trennenden Posten aller Zweige der Funktion auch die Frage über ihre Cyklen (um den Punkt $x = 0$) lösen kann.

Zu diesem Beweise führen uns folgende einfache Erwägungen:

Vorausgesetzt wir haben schon $q \geqq 1$ erste Posten der Reihenentwicklung irgend eines bestimmten Zweiges y_1 der durch die Gleichung

$$R(y) \equiv R_n y^n + \ldots + R_k y^k + \ldots + R_0 = 0$$

definierten Funktion berechnet. Wir bezeichnen die Summe dieser q ersten Posten mit u und setzen

$$y = u + \omega$$

in unsere Gleichung ein. Dann ist ω durch folgende Gleichung bestimmt:

$$R(u) + \omega R'(u) + \omega^2 \frac{R''(u)}{2!} + \ldots = 0, \ldots . (\omega),$$

deren Wurzeln

$$\omega_1 = y_1 - u, \quad \omega_2 = y_2 - u, \quad \ldots . , \quad \omega_n = y_n - u$$

sind.

Ist nun ε die Ordnung des q^{ten} Postens in der Summe u, so ist die Ordnung der Differenz $y_i - u$ dann und nur dann höher als ε, wenn die ersten q Posten in der Entwicklung von y_i genau dieselben sind, wie in der Entwicklung von y_1; in allen übrigen Fällen ist die Ordnung von $y_i - u$ niedriger als ε. Diejenigen Wurzeln der Gleichung (ω), deren Ordnung höher ist als ε, sind nun in ihrer ersten Annäherung leicht zu bestimmen; hat nämlich die Gleichung (ω) σ solche Wurzeln, so sind (nach dem Satze II) ihre ersten Annäherungen $\tilde{\omega}$ zu gleicher Zeit sowohl die ersten Posten der Wurzeln der Gleichung

$$R(u) + \omega R'(u) + \ldots + \omega^\sigma \frac{R^{(\sigma)}(u)}{\sigma!} = 0, \ldots (\tilde{\omega}),$$

wie auch die $(q+1)^{ten}$ Posten in den Entwicklungen jener Zweige y_i, für welche die Summe der ersten Posten von uns als gegeben vorausgesetzt und mit u bezeichnet war.

Im Falle, wenn der Zweig $y = u + \omega$ schon von den übrigen Zweigen getrennt ist, lautet nun die Gleichung $(\tilde{\omega})$ ganz kurz:

$$R(u) + \omega R'(u) = 0,$$

woraus

$$\omega = -\frac{R(u)}{R'(u)}$$

folgt, so dass von dem Augenblicke seiner Trennung an die weitere Berechnung des Zweiges y_1 nach einer Methode vor sich geht, welche mit der Newton'schen Methode der Berechnung numerischer Wurzeln einer numerischen Gleichung $R(y) = 0$ eine unverkennbare Aehnlichkeit hat. Ist nun u eine ganze Funktion von $x^{\frac{1}{\nu}}$, so gilt dasselbe auch von

$$\omega = -\frac{R(u)}{R'(u)},$$

also auch von der ersten Annäherung von ω. Dadurch ist aber auch wirklich der folgende Satz bewiesen:

IV. „Zur Bestimmung der Ordnung des Cykles, zu welchem ein beliebiger Zweig y_1 der Funktion y gehört, ist es notwendig und hinreichend, den trennenden Posten $a\,x^{\frac{\alpha}{\beta}}$ des Zweiges zu kennen. Ist diese Kenntnis auf irgend welchem Wege erworben, so ist die gesuchte Ordnung genau gleich β, wenn die Zahlen α, β ohne gemeinsamen Teiler vorausgesetzt sind".

Der Satz III ist selbstverständlich ein partikulärer Fall des eben bewiesenen.

Wir fügen noch die Bemerkung hinzu, dass, wenn die Gleichung $R(y)_n = 0$ keine vielfachen Wurzeln hat, und wenn $R_n = 1$ ist, man nicht nur behaupten kann, dass die Trennung der Zweige der Funktion y stets nach einer endlichen Anzahl der Posten erfolgen soll, sondern auch den höchsten Grenzwert dieser Anzahl angeben kann, als die höchste Potenz von x, welche in der Diskriminante der Gleichung $R(y)_n = 0$ aufgeht. Denn die Differenz $y_1 - y_2$ zweier Wurzeln der Gleichung $R(y)_n = 0$ ist ein Faktor ihrer Diskriminante.

§ 8. Wir kehren jetzt wieder zu den Resultaten zurück, die aus der Ermittlung erster Annäherungen der Zweige y_i folgen. Diese Resultate hängen, wie wir uns oben überzeugt haben, in allen ihren Teilen von den Hauptzahlen und Hauptindices der Gleichung $R(y)_n = 0$ ab, was man auch im folgenden Satze zusammenfassen kann:

V. „Für alle Gleichungen aus einer bestimmten Klasse

$$\begin{pmatrix} t_0 \; t_1 \; \ldots \; t_s \\ u_0 \; u_1 \; \ldots \; u_s \end{pmatrix}$$

sind die Grössen

$$-\frac{\varrho_1}{\mu_1}, -\frac{\varrho_2}{\mu_2}, \ldots\ldots, -\frac{\varrho_k}{\mu_k}$$

dieselben".

Die Umkehrung dieses, für uns so wichtigen Satzes ist aber nicht richtig, da nicht alle Hauptzahlen zur Bestimmung von ϱ_i, μ_i notwendig waren, sondern nur die $t_0, t_{i_1}, \ldots\ldots, t_{i_k}$.

Wir fragen nun:

„Von welcher Gestalt sind alle Funktionalgleichungen, die für $x = 0$ unendlich grosse Lösungen besitzen, so dass dabei μ_1 von diesen Lösungen von der Ordnung $-\frac{\varrho_1}{\mu_1}$, μ_2 von der Ordnung $-\frac{\varrho_2}{\mu_2}, \ldots\ldots$, endlich μ_k von der Ordnung $-\frac{\varrho_k}{\mu_k}$ unendlich sind;

$$n - u_s = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k; \; -\frac{\varrho_1}{\mu_1} < -\frac{\varrho_2}{\mu_2} < \ldots < -\frac{\varrho_k}{\mu_k}$$

ist?"

Diese Frage ist nach verschiedenen Richtungen hin leicht zu beantworten:

1. Für alle in Frage stehenden Gleichungen muss, wie wir wissen,

$$\varrho_j = t_{i_{j-1}} - t_{i_j}$$
$$\mu_j = u_{i_{j-1}} - u_{i_j}$$

sein, also

$$\left.\begin{aligned} t_0 - t_{i_j} &= \varrho_1 + \varrho_2 + \ldots + \varrho_j \\ u_0 - u_{i_j} &= \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_j \end{aligned}\right\} \ldots (j:k).$$

Da wir aber $t_{i_k} = t_s = \min. (r_n, r_{n-1}, \ldots, r_0)$ stets gleich Null annehmen dürfen, so ist bei dieser Annahme

$$t_{i_j} - t_s = t_{i_j} = \varrho_{j+1} + \ldots + \varrho_k,$$
$$u_{i_j} = n - (\mu_1 + \ldots + \mu_j) = m'_j.$$

Mit anderen Worten: eine jede in Frage kommende Gleichung muss unbedingt unter anderen auch folgende Hauptzahlen enthalten:

$$r_n = \varrho_1 + \varrho_2 \,.\,. + \varrho_k;\ r_{m'_1} = \varrho_2 + \,.\,. + \varrho_k;\ \ldots.;\quad r_{m'_{k-1}} = \varrho_k;\ r_{m'_k} = 0.$$

Weiter erinnern wir uns daran, dass in der Reihe der Grössen

$$\frac{r_{m'_{i-1}} - r_q}{m'_{i-1} - q} \qquad q < m'_{i-1}$$

die Grösse

$$\frac{r_{m'_{i-1}} - r_{m'_i}}{m'_{i-1} - m'_i} = \frac{\varrho_i}{\mu_i}$$

das Maximum mit dem kleinsten Index (q) sein muss, und dass dies die einzige Bedingung ist, welcher die r_q unterworfen sind. Daraus erhalten wir

$$\frac{\varrho_i}{\mu_i} \geqq \frac{r_{m'_{i-1}} - r_q}{m'_{i-1} - q} \quad \text{für } m'_{i-1} > q > m'_i$$

oder

$$r_q \geqq (q - m'_{i-1}) \frac{\varrho_i}{\mu_i} + r_{m'_{i-1}} = (q - m'_{i-1} + \mu_i) \frac{\varrho_i}{\mu_i} + r_{m'_i},$$

$$\text{d. h.} \quad r_q \geqq (q - m'_i) \frac{\varrho_i}{\mu_i} + \varrho_{i+1} + \ldots + \varrho_k\,.$$

Es ist also

$$r_q \geqq (q - m'_i) \frac{\varrho_i}{\mu_i} + \varrho_{i+1} + \,.\,. + \varrho_k \text{ für } m'_{i-1} > q > m'_i$$

$$\text{und} \quad r_q > (q - m'_i) \frac{\varrho_i}{\mu_i} + \varrho_{i+1} + \ldots + \varrho_k \text{ für } q < m'_i\,.$$

Für ein durch folgende Einschränkung

$$n > m'_1 > \ldots. > m'_{i-1} > q > m'_i > \ldots. > m'_k$$

bestimmtes q haben wir danach eine ganze Kette von Bedingungen:

$$r_q \geqq (q - m'_i)\frac{\varrho_i}{\mu_i} + \varrho_{i+1} \ldots + \varrho_k$$

$$r_q > (q - m'_{i-1})\frac{\varrho_{i-1}}{\mu_{i-1}} + \varrho_i + \ldots + \varrho_k$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$r_q > (q - m'_1)\frac{\varrho_1}{\mu_1} + \varrho_2 + \ldots + \varrho_k.$$

Es ist aber leicht zu sehen, dass die erste von diesen Bedingungen alle übrigen schon in sich einschliesst. In der That ist für $q < m_j$

$$(q - m'_{j+1})\frac{\varrho_{j+1}}{\mu_{j+1}} + \varrho_{j+2} \ldots + \varrho_k > (q - m'_j)\frac{\varrho_j}{\mu_j} + \\ + \varrho_{j+1} + \ldots + \varrho_k,$$

da $\quad (q - m'_{j+1})\frac{\varrho_{j+1}}{\mu_{j+1}} = (q - m'_j)\frac{\varrho_{j+1}}{\mu_{j+1}} + \varrho_{j+1}$

ist, und

$$q - m'_j < 0$$

$$\frac{\varrho_{j+1}}{\mu_{j+1}} < \frac{\varrho_j}{\mu_j}$$

also $\quad (q - m'_j)\frac{\varrho_{j+1}}{\mu_{j+1}} > (q - m'_j)\frac{\varrho_j}{\mu_j}.$

Als Endresultat erhalten wir:

$$\begin{cases} r_q \geqq (q - m'_i)\frac{\varrho_i}{\mu_i} + \varrho_{i+1} + \ldots + \varrho_k \text{ für } m'_{i-1} > q > m'_i \\ r_{m'_i} = \varrho_{i+1} + \varrho_{i+2} + \ldots + \varrho_k \end{cases}$$

2. Wir wollen eine Gleichung, deren sämtliche Wurzeln von einer und derselben Ordnung $-\frac{\varrho}{\mu}$ sind, durch das Symbol $\left(\frac{\varrho'}{\mu'}\right)^e = 0$ darstellen, worin $\mu = \mu' e$ den Grad der Gleichung, e den grössten gemeinschaftlichen Teiler von ϱ, μ bezeichnet. Im Falle $-\frac{\varrho}{\mu} = 0$ soll $\varrho' = 0$, $\mu' = 1$, e gleich dem Grade der Gleichung gesetzt werden. Die ersten μ Glieder der Funktion $\left(\frac{\varrho'}{\mu'}\right)^e$ wollen wir mit dem Symbol $\overline{\left(\frac{\varrho'}{\mu'}\right)}^e$ bezeichnen. — Nach dem Satze II (S. 17)

sehen nun alle fraglichen Gleichungen folgendermassen aus:

$$x^{\varrho_2 + \cdots + \varrho_k} y^{m'_1} \overline{\left(\frac{\varrho'_1}{\mu'_1}\right)}^{e_1} + \cdots + x^{\varrho_k} y^{m'_{k-1}} \overline{\left(\frac{\varrho'_{k-1}}{\mu'_{k-1}}\right)}^{e_{k-1}} +$$

$$+ y^{m'_k} \overline{\left(\frac{\varrho'_k}{\mu'_k}\right)}^{e_k} + \left(\frac{0}{1}\right)^{n_s} = 0,$$

worin, wie oben,

$$m'_i = n - (\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_i) \text{ ist.}$$

Wir wissen weiter, dass die Ordnungen p_i der Koeffizienten einer Gleichung $\left(\frac{\varrho'}{\mu'}\right)^e = 0$ durch die Bedingungen

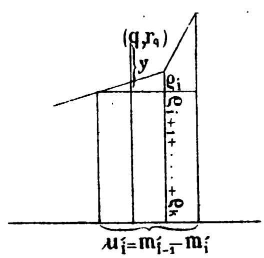
$$p_\mu = \varrho;\ p_k \geqq k \cdot \frac{\varrho}{\mu};\ p_0 = 0\ (k = 1, 2, \ldots, \mu - 1)$$

bestimmt sind. Daraus erhalten wir für die Ordnungen r_q der Koeffizienten aller fraglichen Gleichungen folgende Bestimmungen:

$$\begin{cases} r_q \geqq (q - m'_i) \frac{\varrho_i}{\mu_i} + \varrho_{i+1} + \cdots + \varrho_k \text{ für } m'_{i-1} > q > m'_i \\ r_{m'_i} = \varrho_{i+1} + \cdots + \varrho_k. \end{cases}$$

in Uebereinstimmung mit der ersten Ableitung.

3. Es ist aus der Figur des Newton'schen Parallelogrammes, das für alle fraglichen Gleichungen dasselbe ist,



ohne weiteres klar, dass, da (q, r_q) nicht ausserhalb des Parallelogrammes liegen darf, bei $m'_{i-1} > q > m'_i$

$$r_q = y + \varrho_{i+1} + \cdots + \varrho_k$$

und $$\frac{y}{\varrho_i} \geqq \frac{q - m'_i}{m'_{i-1} - m'_i} = \frac{q - m'_i}{\mu_i},$$

also $$y \geqq (q - m'_i) \frac{\varrho_i}{\mu_i}$$

und $$r_q \geqq (q - m'_i) \frac{\varrho_i}{\mu_i} + \varrho_{i+1} + \cdot \cdot + \varrho_k$$
sein wird.

Für die Ecken der Figur ergiebt sich aber

$$r_{m'_i} = \varrho_{i+1} + \cdot \cdot \cdot \cdot + \varrho_k .$$

Dies ist die einfachste Ableitung. Wir sehen daraus, dass die Newton'sche Idee bis auf den heutigen Tag nützlich bleibt, und es wäre zu bedauern, wenn man sie jetzt der Vergessenheit übergeben wollte. (C. Jordan erwähnt des Parallelogrammes nicht mehr in der letzten Ausgabe seines „Cours d'Analyse"; vergl. dagegen Seite 118 des „Berichtes über die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen etc." von Brill und Noeter, im Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung, 1892—93.)

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{g}$ (x) die kleinste ganze Zahl, die nicht kleiner ist als x, so können wir

$$r_{m'_i} = \varrho_{i+1} + \cdot \cdot \cdot + \varrho_k$$
$$r_q \geqq \mathfrak{g}\left((q - m'_i) \frac{\varrho_i}{\mu_i} + \varrho_{i+1} \cdot \cdot \cdot + \varrho_k \right) \text{ für } m'_{i-1} > q > m'_i$$

setzen. Führen wir noch die Bezeichnungen

$$\mu_1 + \cdot \cdot \cdot + \mu_i = m_i ; \quad n - q = g$$
ein, so wird

$$r_{n-m_i} = \varrho_{i+1} + \cdot \cdot \cdot + \varrho_k$$
$$r_{n-g} \geqq \mathfrak{g}\left((m_i - g) \frac{\varrho_i}{\mu_i} + \varrho_{i+1} \cdot \cdot + \varrho_k \right),$$

und wenn wir endlich

$$g = m_{i+1} + \gamma_i, \; r_{n-g} = \delta^{(i)}_{\gamma_i} \quad \text{setzen:}$$

$$\delta^{(i)}_{\gamma_i} \geqq \mathfrak{g}\left((\mu_i - \gamma_i) \frac{\varrho_i}{\mu_i} + \varrho_{i+1} \cdot \cdot \cdot + \varrho_k \right)$$
$$\delta^{(i)}_{\mu_i} = \varrho_{i+1} + \cdot \cdot \cdot + \varrho_k ,$$

ein Resultat, welches von dem von Herrn Prof. L. Koenigsberger in dem Art. II Seite 328 erhaltenen nicht wesentlich verschieden ist.

Um den Zusammenhang zwischen unseren Untersuchungen und der soeben citierten Arbeit des Herrn Prof. L. Koenigsberger noch deutlicher hervortreten zu lassen, wollen wir noch die folgende Frage beantworten:

Wir wissen, dass alle Zweige der Funktion y nur dann von einer und derselben Ordnung $-\frac{\varrho}{\mu}$ sind, wenn

$$r_0 = 0; \quad \frac{r_k}{k} \geqq \frac{r_n}{n} = \frac{\varrho}{\mu} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

ist, und nun fragen wir, wann diese Zweige sich in zwei Cyklen von den Ordnungen $\nu_1 = \varepsilon_1 \mu'$ und $\nu_2 = \varepsilon_2 \mu'$ gruppieren?

In diesem Fall soll die Gleichung $K(\alpha) = 0$ eine ε_1-fache und eine ε_2-fache Wurzel haben, d. h. es soll identisch

$$K(\alpha) \equiv E_{no} (\alpha - a)^{\varepsilon_1} (\alpha - b)^{\varepsilon_2}$$

sein. Diese Bedingung ist notwendig, aber nicht immer hinreichend.

Falls $n = 2\mu'$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ ist, ist diese Bedingung immer erfüllt. Dabei ist sie immer auch hinreichend, wenn nicht $a = b$, d. h. wenn nicht

$$E^2_{\frac{n}{2}o} - 4 E_{no} E_{oo} = 0$$

ist, in welchem Falle alle Zweige der Funktion auch nur einen Cyklus von der Ordnung $2\mu' = n$ bilden können.

§ 9. Die von uns in dem vorangehenden Paragraphen gewonnenen Resultate stimmen mit denen von Herrn Prof. Koenigsberger wesentlich überein (siehe K., II), obschon sie auch auf anderen Wegen gefunden sind. Im Zusammenhang mit dem ersten Satze der erwähnten Arbeit (K., II) enthalten diese Resultate alles, was über die Cyklen einer algebraischen Funktionalgleichung a priori, blos aus der Natur ihrer Koeffizienten, sich bestimmen lässt. Es sei mir gestattet, den Hauptinhalt jenes Satzes hier kurz wieder-

zugeben, da die damit verbundenen allgemeinen Begriffe uns bald von Nutzen sein werden.

Durch die Substitution $u = \frac{y}{f_n(z)}$ wird die algebraische Gleichung:

$$f_n(z) . u^n + \ldots + f_k(z) . u^k + \ldots + f_o = 0$$

in die Form

$$R(y) \equiv y^n + R_{n-1} y^{n-1} + \ldots + R_0 = 0$$

gebracht, worin die R_j ganze Funktionen von z sind. Die Diskriminante $\Delta(z)$ dieser Gleichung wird rational durch die Elimination von y aus den Gleichungen:

$$R(y) = 0 \qquad R'(y) = 0$$

erhalten. Es sei $D(z) = 0$ die Gleichung, welche alle verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\Delta(z) = 0$ und zwar eine jede nur einmal angiebt. $D(z)$ wird auch rational erhalten; seien $z_1, z_2, \ldots, z_q$ alle Wurzeln der Gleichung $D(z) = 0$; die symmetrische Funktion

$$\Phi = R(y, z_1) . R(y, z_2) \ldots R(y, z_q)$$

dieser Wurzeln ist eine auf rationalem Wege konstruierbare Funktion von y; ebenso auch die Funktion $F(y)$, die, gleich Null gesetzt, uns alle Wurzeln von $\Phi(y) = 0$ und zwar eine jede nur einmal liefert. Herr Prof. Koenigsberger zeigt nun, dass wir, wenn wir

$$F(y) = t$$

setzen und y aus dieser Gleichung und aus der Gleichung

$$R(y) = 0$$

eliminieren (was auch durch rationale Prozesse geschieht), eine Gleichung in t erhalten:

$$t^n + \ldots + F_1 . t + F_0 = 0,$$

welche zu der Gleichung $R(y) = 0$ in folgenden Beziehungen steht:

1. Alle z, für welche zugleich

$$F_0 = 0; \quad F_1 = 0,$$

und nur diese z sind Verzweigungspunkte der durch die Gleichung $R(y) = 0$ definierten Funktion y.

2. Für alle z, für welche zugleich

$$F_1 = 0; \quad F_0 = 0,$$

ordnen sich die Zweige der Funktionen y und u in Cyklen, deren Anzahl und Ordnungen für beide Funktionen dieselben sind.

Es sei nun $\varphi(z)$ einer der irreduktiblen Faktoren, welcher in F_0 im r_n^{ten}, in F_1 im r_{n-1}^{ten}, ... , in F_{n-1} im r_1^{ten} Grade aufgeht. Für jeden Wert von z, welcher Lösung der Gleichung $\varphi(z) = 0$ ist, werden die möglichen Cyklen von y durch die Hauptzahlen der Reihe

$$(r_n, r_{n-1}, \ldots, r_1, 0)$$

nach der oben angegebenen Methode festgestellt.

Mit Absicht wenden wir die ganze Aufmerksamkeit auf den rein arithmetischen Sinn des Koenigsberger'schen Satzes. Ähnliche Transformationen sind auch für numerische Gleichungen von Bedeutung. So ist die Diskriminante der Gleichung

$$y^2 - 5y + 7 = 0$$

gleich $5^2 - 4 \cdot 7 = -3$; die Kongruenzen:

$$F(y) = y^2 - 5y + 7 \equiv 0; \quad F'(y) = 2y - 5 \equiv 0 \mod. 3$$

haben eine gemeinsame Wurzel $y \equiv 1 \mod. 3$; setzen wir

$$t = y - 1,$$

so wird unsere Gleichung in die folgende:

$$t^2 - 3t + 3 = 0$$

transformiert, deren zwei letzte Koeffizienten durch 3 teilbar sind.

Dies alles, mit der Thatsache verknüpft, dass die Hauptzahlen und Hauptindices, mit deren Hilfe die Grössen $\frac{\varrho_i}{\mu_i}$ bestimmt werden, uns sowohl über die möglichen Ordnungen der Cyklen, in welche sich die Zweige der durch die Gleichung $R(y) = 0$ definierten Funktion y gruppieren,

Auskunft geben, wie auch über die Gradzahlen der Gleichungen, in welche die Gleichung $R(y) = 0$ zerfallen kann, deutet darauf hin, dass die eigentliche Grundlage aller unserer Betrachtungen eine arithmetische sein muss, eine von dem Begriff einer konvergenten unendlichen Potenzreihe vollkommen unabhängige. Die Tragweite aller unseren Resultate muss eine viel grössere, muss von der algebraischen Natur der Koeffizienten einer Gleichung $R(y) = 0$ ganz unabhängig und nur von ihrer arithmetischen Natur, d. h. von der Art ihrer Zerlegung in Primfaktoren, abhängig sein. In der That spielt das, was man Wurzel einer Gleichung nennt, keine Rolle, auch in der praktischen Anwendung unserer Resultate: einer jeden Wurzel der Gleichung $\varphi(z) = 0$ entsprechen genau dieselben Eigenschaften der Funktion y; es kommt also nicht auf die numerischen Werte der Wurzeln der Gleichung $\varphi(z) = 0$ an, sondern allein und lediglich auf die Thatsache, dass $\varphi(z)$ ein irreduktibler Faktor der Diskriminante $\Delta(z)$ ist.

Uns steht nun die Aufgabe bevor, unsere Resultate in ihrer Ableitung von algebraischen Vermengungen zu befreien. Dies scheint auf verschiedenen Wegen möglich und wir wollen im Folgenden alle die verschiedenen Möglichkeiten der Beweise andeuten, wenngleich wir nicht alle Beweise jetzt schon zu liefern im Stande sind.

§ 10. Wir haben gesehen, dass die Ordnungen r_i der Koeffizienten R_i einer Gleichung $R(y)_n = 0$, deren μ_1 Lösungen von der Ordnung $-\frac{\varrho_1}{\mu_1}$, μ_2 von der Ordnung $-\frac{\varrho_2}{\mu_2}$, ... u. s. w. sind, durch folgende Bedingungen bestimmt sind:

$$r_{m'_i} = \varrho_{i+1} + \ldots + \varrho_k$$

$$r_q = g\left((q - m_i)\frac{\varrho_i}{\mu_i} + \varrho_{i+1} + \ldots \varrho_k\right) \text{ bei } m'_{i-1} > q > m'_i.$$

Die Zahlen $r_{m'_i}$ wollen wir wesentliche, alle übrigen r_q unwesentliche Zahlen der Gleichung $R(y)_n = 0$ oder der Funktion $R(y)_n$ nennen und alle möglichen Gleichungen $R(y)_n = 0$ und Funktionen $R(y)_n$ in Hauptklassen

nach ihren wesentlichen Zahlen und deren Indices teilen. Eine jede Hauptklasse besteht aus einigen Klassen

$$\begin{pmatrix} t_0 & t_1 & \dots & t_s \\ u_0 & u_1 & \dots & u_s \end{pmatrix}.$$

Als Symbol einer bestimmten Hauptklasse Γ, sowie aller zu ihr gehörigen Gleichungen und Funktionen wollen wir das folgende annehmen:

$$\Gamma \equiv \left(\frac{\varrho'_1}{\mu'_1}\right)^{e_1} \left(\frac{\varrho'_2}{\mu'_2}\right)^{e_2} \dots \left(\frac{\varrho'_k}{\mu'_k}\right)^{e_k} \left(\frac{0}{1}\right)^{u_s},$$

worin die Buchstaben ϱ'_i, μ'_i, e_i, u_s die bei uns sonst übliche Bedeutung haben. Solche Symbole sind zu dem Zwecke eingeführt, dass wir jetzt den Satz aussprechen können:

VI. „Eine Funktion, die zu der Hauptklasse

$$\Gamma \equiv \left(\frac{\varrho'_1}{\mu'_1}\right)^{e_1} \dots \left(\frac{\varrho'_k}{\mu'_k}\right)^{e_k} \left(\frac{0}{1}\right)^{u_s}$$

gehört, kann nur Teiler haben, die zu den Hauptklassen

$$\Gamma' \equiv \left(\frac{\varrho'_1}{\mu'_1}\right)^{\varepsilon_1} \dots \left(\frac{\varrho'_k}{\mu'_k}\right)^{\varepsilon_k} \left(\frac{0}{1}\right)^{v_s},$$

bei $\varepsilon_i \leqslant e_i; \quad v_s \leqslant u_s$

gehören".

Es besteht also eine vollständige Analogie zwischen den Hauptklassen und den in ihre Primfaktoren zerlegten ganzen Zahlen.

Zwei Funktionen A, B, die zu den Hauptklassen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ gehören, ergeben als ihr Produkt eine Funktion $C = A\,B$ von der Hauptklasse $\Gamma = \mathcal{A}\,\mathcal{B}$. Ausser den Funktionen von der Form $C = A\,B$ enthält vielleicht die Hauptklasse $\Gamma = \mathcal{A}\,\mathcal{B}$ auch noch andere Funktionen; dies ist für die folgenden Betrachtungen von keiner Bedeutung.

Es seien

$$A \equiv x^{a_m} E_m y^m + \dots + x^{a_0} E_0; \quad (x^{a_i} E_i = A_i)$$
$$B \equiv x^{b_n} F_n y^n + \dots + x^{b_0} F_0; \quad (x^{b_j} F_j = B_j)$$

zwei Funktionen, die nur bis auf ihre Gradzahlen m, n und die Ordnungen a_i, b_j ihrer Koeffizienten bestimmt sind, so dass die Einheiten E_i, F_j in den Ausdrücken dieser Funktionen willkürlich bleiben. Multiplizieren wir A und B miteinander, so erhalten wir:

$$C = A\,B = C_{m+n}\, y^{m+n} + \ldots + C_0,$$

bei

$$C_q = \sum_{k=0}^{k=q} A_k\, B_{q-k},$$

und die Ordnungen c_q der Koeffizienten C_q sind durch die folgenden Bedingungen bestimmt:

$c_q = \min.\ (a_k + b_{q-k})$ bei monomin. System $(a_k + b_{q-k})$
$c_q \geqq \min.\ (a_k + b_{q-k})$ bei polymin. System $(a_k + b_{q-k})$.

Alle so erhaltenen Funktionen gehören zu einer und derselben Hauptklasse, folglich sind alle wesentlichen Zahlen der Systeme $c_{m+n}, \ldots, c_1, c_0$ dieselben. Diese wesentlichen Zahlen können nur monominimalen Systemen $(a_k + b_{q-k})$ entsprechen. Dies geht aus der einfachen Thatsache hervor, dass bei polyminimalem System

$$(a_k + b_{q-k})$$

die Einheiten E_k, F_{q-k} so gewählt werden können, dass

$$C_q = \sum_{k=0}^{k=q} A_k\, B_{q-k} = \sum_{k=0}^{k=q} x^{a_k + b_{q-k}} . E_k\, F_{q-k} = 0,$$

folglich $c_q = \infty$ wird. Daraus ergeben sich aber folgende Schlüsse:

Wir teilen alle möglichen Zahlensysteme

$$(a_m, a_{m-1}, \ldots, a_0);\quad (b_n, b_{n-1}, \ldots, b_0)$$

in Hauptklassen ein, genau wie die Funktionen $R\,(y)_n$; unter dem Produkte zweier Systeme $(a_m, \ldots, a_0)$ und $(b_n, \ldots, b_0)$ verstehen wir ein System

$$(c_{m+n}, c_{m+n-1}, \ldots, c_0) = (a_m, a_{m-1}, \ldots, a_0)\,(b_n, b_{n-1}, \ldots, b_0),$$

dessen Zahlen folgendermassen zu bestimmen sind:

$c_q = \min.\ (a_k + b_{q-k})_{k=0}^{k=q}$ bei monomin. System $(a_k + b_{q-k})$
$c_q = \min.\ (a_k + b_{q-k})_{k=0}^{k=q} + g$ bei polymin. Syst. $(a_k + b_{q-k})$,

worin g eine beliebige ganze positive Zahl ist.

Das Produkt zweier Systeme ist also kein eindeutig definiertes System, aber alle Produkte A B = C zweier Systeme A, B, die zu den Hauptklassen *Α*, *B* gehören, gehören selbst zu einer vollständig bestimmten Hauptklasse $\Gamma = A\,B$, und für die Hauptklassen A, B, Γ gelten folgende zwei Sätze:

I. Die Hauptklasse $\left(\frac{\varrho'}{\mu'}\right)^1$ ist eine primitive.

II. Eine jede Hauptklasse H lässt sich, und zwar auf eine einzige Weise, in Primfaktoren zerlegen:

$$H \equiv \left(\frac{\varrho'_1}{\mu'_1}\right)^{e_1} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \left(\frac{\varrho'_k}{\mu'_k}\right)^{e_k} \left(\frac{0}{1}\right)^{u_s},$$

worin die Zahlen ϱ'_i, μ'_i, e_i, u_s nach den oben erörterten Methoden aus den wesentlichen Zahlen eines beliebigen Systemes $(r_n, \ldots, r_0)$, das zu der Hauptklasse Γ gehört, zu bestimmen sind.

Wir haben hier zwar noch keinen rein arithmetischen Beweis dieser zwei Sätze geliefert, doch haben wir die Sätze selbst schon bewiesen. In dem jetzt folgenden Kapitel wollen wir die Tragweite dieser Sätze genau bestimmen, sowie sie aus rein arithmetischen Betrachtungen herleiten. Dann wird die Untersuchung über die cyklischen Punkte der Riemann'schen Fläche irgend einer algebraischen durch die Gleichung R (y, z) = 0 definierten Funktion y auf rein arithmetische Prinzipien zurückgeführt.

Zweites Kapitel.

Zahlentheoretische Auffassung des Problemes.

§ 11. Wir wollen unter einem arithmetischen Gebilde ein System von irgend welchen Dingen oder Elementen a, b, c, . . . verstehen, welches folgende Eigenschaften besitzt:

1. Man kann eine endliche Anzahl beliebiger Elemente a, b, c, . . des Systemes zu einem Elemente (a, b, c, . . ,) desselben Systemes komponieren, wobei das associative: $(a, (b, c)) = ((a, b), c)$, sowie das kommutative $(a, b) = (b, a)$ Gesetz gilt.

2. Es ist $(a, b) = (a, c)$, wenn $b = c$; aber auch $(a, b) \neq (a, c)$, wenn $b \neq c$. Daraus folgt, dass die Gleichung $(a, x) = c$ nicht mehr als eine Lösung in x haben kann.

3. Die Gleichung $(a, x) = c$ soll für jedes a und c eine Lösung besitzen. *)

Folgende Sätze aus der Abel'schen Gruppentheorie lassen sich ohne Weiteres auf arithmetische Gebilde übertragen:

1. Für jedes a hat die Gleichung $(a, x) = a$ eine und dieselbe Lösung, welche wir mit $x = e$ bezeichnen wollen.

2. Bezeichnen wir weiter die Lösung der Gleichung $(a, x) = e$ mit $\bar{a}$, so sind die Elemente a, $\bar{a}$ reciprok, so dass $\bar{\bar{a}} = a$ ist.

3. Die Lösung einer jeden Gleichung $(a, x) = b$ ist $x = (\bar{a}, b)$.

Als Beispiel eines arithmetischen Gebildes wollen wir die Gesamtheit aller Farbenqualitäten anführen, wobei die weisse Farbe die Rolle des Elementes e spielt; zwei komplementäre Farben sind reciproke Elemente.

Führen wir für die Komposition der Elemente eines arithmetischen Gebildes die Zeichen $+$, $-$, beziehungsweise $\times$, : ein, so haben wir einen Modul (cf. „Vorlesungen über Zahlentheorie" etc. von R. Dedekind, 2. Auflage, 1879; § 161), beziehungsweise eine (Abel'sche) Gruppe vor uns; das Element e wird zu Null (0), respektiv zur Einheit (1); reciproke Elemente werden zu entgegengesetzten $(a, -a)$, respektive zu inversen $(a, \frac{1}{a})$.

Elemente eines Systemes sollen Zahlen und das System selbst ein Körper genannt werden, wenn ihm folgende Eigenschaften inne wohnen:

*) Vergl. H. Weber, Algebra, 2. Aufl., Bd. II, S. 3—6.

1. Es ist ein arithmetisches Gebilde in doppeltem Sinne (mit einer kleinen Ausnahme, die sogleich erwähnt wird), d. h., es lassen sich je zwei seiner Elemente a, b auf zweierlei Weise komponieren, so dass die Zeichen $a + b$ der Addition und $a \,.\, b$ der Multiplikation für diese zwei verschiedenen Kompositionsarten von a, b dienen können.

2. Es soll zwischen Addition und Multiplikation beliebiger Elemente a, b, c eines Körpers folgende allgemeine Beziehung stattfinden:

$$\underline{a\,(b + c) = a\,b + a\,c.}$$

Aus dieser Definition kann man nun noch folgende Eigenschaften eines Körpers ableiten:

a) Ist $a\,b = 0$, so ist entweder $a = 0$ oder $b = 0$; und umgekehrt: ist $a = 0$ oder $b = 0$, so ist $a\,b = 0$, d. h.,

a) Ein Produkt $a.b\ldots$ von mehreren Zahlen eines Körpers ist immer dann und nur dann Null, wenn wenigstens einer seiner Faktoren gleich Null ist.

Denn es folgt aus der Identität:

$$a\,(1 + b) = a + a\,b,$$

dass, bei $a\,b = 0$, $a \neq 0$

$$a\,(1 + b) = a$$

ist, und da die Gleichung

$$a\,x = a$$

nur eine Lösung $x = 1$ hat, so ist

$$1 + b = 1,$$

und da wiederum die Gleichung

$$1 + y = 1$$

nur eine Lösung $y = 0$ hat, so ist

$$b = 0.$$

Ist umgekehrt $b = 0$, also

$$a\,(1 + 0) = a + a\,b,$$

d. h.,

$$a = a + a\,b,$$

so ist

$$a\,b = a\,.\,0 = 0.$$

b) Es ist $a . -1 = -a$
für jedes a. Denn setzen wir $b = 1$, $c = -1$ in die allgemein giltige Identität:

$$a(b + c) = ab + ac$$

ein, so ist $a(1 - 1) = a . 1 + a . -1,$

oder $0 = a + a . -1,$

woraus $a . -1 = -a$

folgt.

c) Das Symbol $0^{-1} = \frac{1}{0}$ kann in den Grenzen keines Körpers reelle Bedeutung haben, oder: es giebt keine Zahl x, die der Gleichung $0 . x = 1$ genügt, oder auch noch anders:

c) Alle Zahlen eines Körpers bilden einen Modul, und alle seine Zahlen, die Zahl 0 ausgenommen, eine (Abel'sche) Gruppe.

Denn hat die Gleichung $0 . x = 1$ eine bestimmte Lösung x und multiplizieren wir die beiden Seiten einer Gleichung $a . 0 = 0$, worin $a \neq 1$, mit x, so ist $a . 1 = 1$, d. h., $a = 1$, gegen die Annahme, dass $a \neq 1$. Von dem Falle, dass der ganze Körper nur aus einem einzigen Elemente a besteht, welcher dann zugleich gleich 1 und 0 ist, sehen wir hier und überall natürlich ab.

Ein Modul, dessen Elemente lauter Zahlen eines gewissen Körpers Ω sind, heisst bekanntlich eine Ordnung, wenn seine Zahlen sich durch Multiplikation reproduzieren, und wenn er die Zahl 1, folglich auch alle ganzen rationalen Zahlen (d. h., die Elemente

$$1,\ 1 + 1 = 2, \ldots, (-1) + (-1) = -2 \ldots)$$

enthält. Eine Ordnung N erzeugt einen Körper Ω, wenn alle Zahlen desselben durch Quotienten der Zahlen in N dargestellt werden können, und wenn alle Zahlen in N zugleich Zahlen in Ω sind.

Einen Körper nennen wir regulär, wenn es eine ihn erzeugende Ordnung N giebt, deren jede Zahl sich wesentlich (d. h., von den Faktoren-Einheiten abgesehen) nur auf eine Weise in eine endliche Anzahl von (reellen oder

idealen) Primfaktoren zerlegen lässt. Die Zahlen einer solchen Ordnung N haben alle Rechte, ganze Zahlen des regulären Körpers Ω genannt zu werden; alle übrigen Zahlen in Ω, deren jede als Quotient zweier ganzen Zahlen dargestellt werden kann, seien gebrochene Zahlen genannt.

Adjungieren wir einem regulären Körper Ω irgend eine Grösse y, die nicht dem Körper Ω angehört, so entsteht ein Körper Ω (y) über Ω. Dieser soll ein transcendenter Körper (in Bezug auf Ω) heissen, wenn die Zahl Null darin nicht in der Form

$$0 = a\,y^n + b\,y^{n-1} + \ldots + q$$

gegeben werden kann, wobei a, b, . . . , q Zahlen in Ω und nicht sämtlich gleich Null sind.

Als ganze Zahlen in Ω (y) definieren wir die Ausdrücke (Funktionen):

$$R(y)_n \equiv R_n\,y^n + \ldots + R_k\,y^k + \ldots + R_0,$$

deren Koeffizienten $R_n, R_{n-1}, \ldots, R_0$ ganze Zahlen des regulären Körpers Ω sind. Eine jede ganze Zahl eines transcendenten Körpers ist durch das System $R_n, R_{n-1}, \ldots, R_0$ ihrer Koeffizienten eindeutig bestimmt und umgekehrt.

Nun kommen wir zu der Hauptfrage dieses Kapitels:

„Es sollen die Kriterien aufgestellt werden, wonach man auf Zerlegbarkeit einer ganzen Zahl:

$$R(y)_n \equiv R_n\,y^n + R_{n-1}\,y^{n-1} + \ldots + R_0$$

eines transcendenten Körpers Ω (y) über einem regulären Körper Ω unmittelbar aus den Zerlegungen der Koeffizienten R_n, $R_{n-1}, \ldots, R_0$ in ihre Primfaktoren schliessen kann.“

Diese Frage ist aber schon am Ende des ersten Kapitels durch die zwei Sätze über Hauptklassen von Zahlensystemen $(a_m, a_{m-1}, \ldots, a_0)$ erledigt worden. Wir geben im Folgenden nur noch andere Lösungen derselben Frage.

§ 12. Zunächst zeigen wir, wie weit man mit rein algebraischen Hilfsmitteln in die Lösung der Frage eindringen kann (im ersten Kapitel war eine funktionen-

theoretische, auf Reihenentwicklungen sich stützende Lösung gegeben).

Es sei $R(y)_n$ eine von Null verschiedene ganze Zahl eines transcendenten Körpers $\Omega(y)$. Wir verstehen unter der Gleichung

$$R(y)_n = 0$$

die Forderung, alle Zahlen des Körpers $\Omega(y)$ weiter nur als Repräsentanten verschiedener Klassen seiner Ordnung N, die aus allen seinen ganzen Zahlen besteht, und die ja ein Modul ist, nach dem Modul $R(y)_n \cdot N$ aufzufassen. Unter einer Wurzel der Gleichung $R(y)_n = 0$ verstehen wir die Bedeutung des Symbols y in den Ausdrücken der Zahlen des Körpers $\Omega(y)$ nach der Aussage jener Forderung. Oder auch: wir verstehen unter einer Wurzel der Gleichung $R(y)_n = 0$ ein Rechnungssymbol y, welches mit den Zahlen des Körpers Ω addiert, multipliziert u. s. w. werden kann unter durchgängiger Annahme, dass $R(y)_n = 0$ ist.

Eine jede Gleichung $R(y)_n = 0$ hat n also definierte Lösungen, welche wir algebraische Zahlen des Körpers Ω nennen wollen, und welche übrigens nichts anderes sind, als n Reste $S_\nu z^\nu + \ldots + S_0$ der Zahlen des transcendenten Körpers $\Omega(z)$ nach einer Galois'schen Resolvente $G(z)$ der Funktion $R(y)$, so dass die Gleichung

$$R(y)_n = 0$$

eigentlich nichts anderes ist, als die Kongruenz:

$$R(y)_n \equiv 0 \qquad \text{mod. } G(z).$$

Alle formalen Sätze über die Wurzeln einer Gleichung etc., d. h., die ganze Galois'sche Algebra ist somit auf den Fall eines beliebigen Körpers Ω anwendbar gemacht.

Es sei x eine Primzahl des regulären Körpers Ω, die in den Koeffizienten einer gegebenen Funktion $R(y)_n$ als Teiler vorkommt. Alle Zahlen des Körpers Ω können in der Form $x^\mu \cdot E$ dargestellt werden, worin E der Quotient zweier ganzer, durch x nicht teilbarer Zahlen des Körpers Ω, μ eine ganze rationale Zahl ist. Wir führen zeitweise einen neuen Begriff von ganzen Zahlen des Körpers Ω ein:

nämlich sollen als solche alle Zahlen $x^{\mu} . E$ gelten, für welche $\mu \geqq 0$ ist; im Falle $\mu = 0$ soll die (im erweiterten Sinne) ganze Zahl E Einheit heissen. Die Zahl μ nennen wir überhaupt Ordnung der Zahl $x^{\mu} . E$ (in Bezug auf die Primzahl x).

Eine algebraische Zahl y des Körpers Ω, die durch eine Gleichung $R(y)_n = 0$ gegeben ist, soll algebraische Einheit des Körpers Ω heissen, wenn alle Koeffizienten der Gleichung $R(y)_n = 0$ ganze Zahlen und R_0, R_n ausserdem Einheiten in Bezug auf x (d. i., nicht durch x teilbar) sind. Das Produkt von mehreren Einheiten ist immer wieder eine Einheit.

Eine algebraische Zahl y, welche durch eine Gleichung $R(y)_n = 0$ gegeben ist, und welche keine algebraische Einheit des Körpers Ω ist, kann im Allgemeinen nicht immer in der Form $x^{\pm \frac{\varrho}{\mu}} . E$ gegeben werden, worin ϱ, μ ganze positive rationale Zahlen, E eine algebraische Einheit (in Bezug auf x) des Körpers Ω, x eine bestimmte Primzahl des Körpers Ω ist.

Darin liegt der Grundunterschied zwischen dem Falle eines beliebigen Körpers und dem des von uns im ersten Kapitel untersuchten funktionentheoretischen Körpers Ω.

Wir wollen eine Funktion $R(y)_n$, sowie die ihr entsprechende Gleichung $R(y)_n = 0$ regulär nennen, wenn alle Wurzeln der Gleichung $R(y)_n = 0$ von der Form $x^{\pm \frac{\varrho}{\mu}} . E$ sind. Auf reguläre Funktionen ist das Hauptergebnis des ersten Kapitels algebraisch übertragbar.

Um dies zu ersehen, genügt es, die Koeffizienten einer regulären Funktion $R(y)_n$ direkt als symmetrische Funktionen der Wurzeln $x_{\frac{i}{n}}^{-\frac{\varrho_i}{\mu_i}} E_{\frac{i}{n}}$ der Gleichung $R(y)_n = 0$ zu bilden. (Siehe K., II, S. 326—328.)

Gehört z. B. die Funktion

$$R(y)_n \equiv x^{r_n} E_n y^n + \ldots + x^{r_0} E_0$$

zu der Hauptklasse $\left(\frac{\varrho'}{\mu'}\right)^e$, so dass

$$r_0 = 0;\ \frac{r_k}{k} \geqq \frac{r_n}{n} = \frac{\varrho'}{\mu'} \text{ für } k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

so ist es leicht zu sehen, dass sie eine reguläre ist; denn setzen wir $y = x^{-\frac{r_n}{n}} . u$ in die Gleichung $R(y)_n = 0$ ein, so ergiebt sich, dass u eine algebraische Einheit ist: denn alle Koeffizienten der Gleichung $R\left(x^{-\frac{r_n}{n}} . u\right)_n = 0$ in u sind ganze algebraische Zahlen (wegen $r_k - k . \frac{r_n}{n} \geqq 0$), und der erste und letzte Koeffizient Einheiten.

Ist jetzt die Funktion $R(y)_n$ durch eine ganze Funktion $P(y)_\nu$ ($\nu < n$) teilbar, und sehen die Wurzeln der Gleichung $P(y)_\nu = 0$, welche auch Wurzeln der Gleichung $R(y)_n = 0$ sind, folgendermassen aus:

$$y_{\frac{i}{\nu}} = x^{-\frac{r_n}{n}} . E_{\frac{i}{\nu}},$$

so muss das Produkt $\frac{P_\nu}{P_0}$ dieser Wurzeln eine Zahl in Ω sein, woraus folgt (da das Produkt mehrerer Einheiten wieder Einheit ist), dass $x^{-\frac{r_n \nu}{n}}$ eine Zahl in Ω, folglich $\frac{r_n \nu}{n}$ eine ganze (rationale) Zahl ist.

So haben wir für alle regulären Körper Ω den Satz:

„Eine jede Funktion $R(y)_n$ von der Hauptklasse $\left(\frac{\varrho'}{\mu'}\right)^e$ kann nur durch Funktionen teilbar sein, die zu den Hauptklassen $\left(\frac{\varrho'}{\mu'}\right)^\varepsilon$, bei $\varepsilon < e$ gehören".

(Für den Fall $e = 1$ ergiebt sich die Irreduktibilität der Funktion $\left(\frac{\varrho'}{\mu'}\right)^1$.)

In diesem Satz ist der berühmte Eisenstein'sche als ein sehr partikulärer Fall enthalten; allerdings hat dafür der letztere den Vorzug, auf rein arithmetischem Wege bewiesen worden zu sein. Jetzt machen wir noch den letzten Schritt und beweisen — nicht nur diesen — sondern den ganzen Satz VI des ersten Kapitels rein arithmetisch.

In Bezug auf die algebraische Ableitung des Satzes bemerken wir nur noch, dass der Unterschied zwischen ihren Resultaten für den Fall einer regulären und für den einer irregulären Gleichung $R(y)_n = 0$ auf die Art zurückzuführen ist, auf welche der Primfaktor x der Diskriminante Δ des zu $R(y)_n$ gehörigen Normalkörpers N in reelle oder ideale Primfaktoren (Primideale) in diesem Körper N zerfällt. Im Falle einer regulären Gleichung $R(y)_n = 0$ sind alle solchen Primfaktoren gebrochene Potenzen von x.

§ 13. Wir übertragen den Begriff und die Symbole der in dem ersten Kapitel besprochenen Hauptklassen auf Funktionen $R(y)_n$ eines beliebigen transcendenten Körpers $\Omega(y)$ über einem beliebigen regulären Körper Ω und für eine bestimmte Primzahl x dieses Körpers Ω.

Nehmen wir jetzt zwei Funktionen $R(y)_n$, $P(y)_m$, welche respektive zu den Hauptklassen

$$\left(\frac{\varrho'_1}{\mu'_1}\right)^{e_1}, \left(\frac{\varrho'_2}{\mu'_2}\right)^{e_2}$$

gehören, wobei auch der Fall $\varrho'_1 = 0$, $\mu'_1 = 1$, $e_1 = n$ oder $\varrho'_2 = 0$, $\mu'_2 = 1$, $e_2 = m$ nicht ausgeschlossen bleibt. Es ist bei schon bekannten Bezeichnungen

$$r_0 = 0; \quad r_k \geqq k\,\frac{r_n}{n} = k \cdot \frac{\varrho'_1}{\mu'_1}$$

für die Funktion $R(y)_n$, und bei analogen Bezeichnungen

$$p_0 = 0; \; p_q \geqq q\,\frac{p_m}{m} = q \cdot \frac{\varrho'_2}{\mu'_2},$$

oder:

$$r_k = k \cdot \frac{r_n}{n} + \varrho_k$$

$$p_q = q \cdot \frac{p_m}{m} + \pi_q,$$

wobei ϱ_k, π_q im Allgemeinen $\geqq 0$ und ϱ_0, ϱ_n, π_0, π_m gleich Null sind.

Multiplizieren wir die Funktionen $P(y)_m$, $R(y)_n$ mit einander, so erhalten wir eine Funktion $S(y)_{n+m}$, für welche

$$s_{n+m} = r_n + p_m; \quad s_0 = 0$$

$$s_q \geqq \min. (r_k + p_{q-k})_{k=0}^{k=q},$$

oder

$$s_q \geqq \min. (k \frac{r_n}{n} + (q-k) \frac{p_m}{m} + k \varrho_k + (q-k) \pi_{q-k}),$$

um so mehr also

$$s_q \geqq \min. (k \,.\, \frac{r_n}{n} + (q-k) \frac{p_m}{m})$$

$$= \min. (q \,.\, \frac{p_m}{m} + k (\frac{r_n}{n} - \frac{p_m}{m})).$$

Ist nun

$$\frac{r_n}{n} = \frac{p_m}{m} = \frac{\varrho'_1}{\mu'_1} = \frac{\varrho'_2}{\mu'_2},$$

so ist für jedes q:

$$s_q \geqq q \,.\, \frac{\varrho'_1}{\mu'_1} = \frac{\varrho'_2}{\mu'_2},$$

und die Funktion $S(y)_{m+n}$ gehört zu der Hauptklasse

$$\left(\frac{\varrho'_1}{\mu'_1}\right)^{e_1+e_2} = \left(\frac{\varrho'_1}{\mu'_1}\right)^{e_1} \cdot \left(\frac{\varrho'_2}{\mu'_2}\right)^{e_2}.$$

Ist aber $\frac{r_n}{n} > \frac{p_m}{m}$, so ist für jedes q:

$$s_q \geqq q \,.\, \frac{p_m}{m} + x (\frac{r_n}{n} - \frac{p_m}{m}),$$

worin $x = \min. k$ ist, also:

1. Für $q < m$: $s_q \geqq q \,.\, \frac{p_m}{m}$, da in diesem Falle $x = \min. k = 0$.

2. Für $q = m$: $s_q = q \frac{p_m}{m}$, da in diesem Falle $x = \min. k = 0$ und ϱ_1, $\pi_m = 0$.

3. Für $q = m + \mu > m$: $s_q = q\frac{p_m}{m} + \mu(\frac{r_n}{n} = \frac{p_m}{m})$, da jetzt $x = \min. k = \mu$ ist, oder:

$$s_q \geqq (q - m)\frac{r_n}{n} + p_m.$$

Es gehört also (nach dem Satze V S. 23 ff.) die Funktion $S(y)_{n+m}$ auch in diesem Falle zu der Hauptklasse

$$\left(\frac{\varrho'_1}{\mu'_1}\right)^{e_1} \cdot \left(\frac{\varrho'_2}{\mu'_2}\right)^{e_2}.$$

Wir können das Bewiesene auch in der Form des folgenden Satzes aussprechen:

„Man kann die Hauptklasse $\left(\frac{\varrho'_1}{\mu'_1}\right)^{e_1}$ als die e_1^{te} Potenz der Hauptklasse $\left(\frac{\varrho'_1}{\mu'_1}\right)^1$ und die Hauptklasse

$$\left(\frac{\varrho'_1}{\mu'_1}\right)^{e_1} \left(\frac{\varrho'_2}{\mu'_2}\right)^{e_2}$$

als das Produkt der Hauptklassen $\left(\frac{\varrho'_1}{\mu'_1}\right)^{e_1}$, $\left(\frac{\varrho'_2}{\mu'_2}\right)^{e_2}$ auffassen."

Nun wollen wir die allgemeinere Relation:

$$\left(\frac{\varrho'_1}{\mu'_1}\right)^{e_1} \left(\frac{\varrho'_2}{\mu'_2}\right)^{e_2} \cdots \left(\frac{\varrho'_q}{\mu'_q}\right)^{e_q} = \left(\frac{\varrho'_1}{\mu'_1}\right)^{e_1} \cdot \left(\frac{\varrho'_2}{\mu'_2}\right)^{e_2} \cdots \left(\frac{\varrho'_q}{\mu'_q}\right)^{e_q}$$

beweisen.

Wir setzen voraus, dass dieselbe für 1, 2, . . , $q - 1$ Faktoren $\left(\frac{\varrho'_i}{\mu'_i}\right)^{e_i}$ schon bewiesen ist und zeigen, dass aus dieser Voraussetzung auch die Richtigkeit der Relation für q Faktoren $\left(\frac{\varrho'_i}{\mu'_i}\right)^{e_i}$ sich ergiebt.

Ist $\frac{\varrho'_q}{\mu'_q} = \frac{\varrho'_i}{\mu'_i}$, worin $i = 1$ oder 2, ... , oder $q - 1$, so ist die Relation nach der Voraussetzung richtig. Wir dürfen uns also auf den Fall beschränken, wo alle $\frac{\varrho_i}{\mu_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, q)$ verschieden sind, und zwar nehmen

wir an, dass $\frac{\rho'_1}{\mu'_1} > \frac{\rho'_2}{\mu'_2} > \ldots > \frac{\rho'_q}{\mu'_q}$ ist.

Da weiter nach der Voraussetzung

$$\left(\frac{\rho'_1}{\mu'_1}\right)^{e_1} \cdot \left(\frac{\rho'_2}{\mu'_2}\right)^{e_2} \cdots\cdots \left(\frac{\rho'_{q-1}}{\mu'_{q-1}}\right)^{e_{q-1}}$$
$$= \left(\frac{\rho'_1}{\mu'_1}\right)^{e_1} \left(\frac{\rho'_2}{\mu'_2}\right)^{e_2} \cdots\cdots \left(\frac{\rho'_{q-1}}{\mu'_{q-1}}\right)^{e_{q-1}}$$

ist, so bleibt es uns noch zu beweisen, dass

$$\left(\frac{\rho'_1}{\mu'_1}\right)^{e_1} \left(\frac{\rho'_2}{\mu'_2}\right)^{e_2} \cdots\cdots \left(\frac{\rho'_{q-1}}{\mu'_{q-1}}\right)^{e_{q-1}} \cdot \left(\frac{\rho'_q}{\mu'_q}\right)^{e_q}$$
$$= \left(\frac{\rho'_1}{\mu'_1}\right)^{e_1} \left(\frac{\rho'_2}{\mu'_2}\right)^{e_2} \cdots\cdots \left(\frac{\rho'_q}{\mu'_q}\right)^{e_q} \text{ ist.}$$

Wir nehmen eine beliebige Funktion A von der Hauptklasse

$$A = \left(\frac{\rho'_1}{\mu'_1}\right)^{e_1} \cdots\cdots \left(\frac{\rho'_{q-1}}{\mu'_{q-1}}\right)^{e_{q-1}}$$

und eine beliebige Funktion B von der Hauptklasse $B = \left(\frac{\rho'_q}{\mu'_q}\right)^{e_q}$. Nach dem Satze (S. 26) ist nun

$$A = x^{r_n - \rho_1} y^{n - \mu_1} \overline{\left(\frac{\rho'_1}{\mu'_1}\right)^{e_1}} + A_1 ,$$

worin A eine Funktion von der Hauptklasse

$$\left(\frac{\rho'_2}{\mu'_2}\right)^{e_2} \cdots\cdots \left(\frac{\rho'_{q-1}}{\mu'_{q-1}}\right)^{e_{q-1}}$$

ist, folglich

$$A\,B = x^{r_n - \rho_1} y^{n - \mu_1} \overline{\left(\frac{\rho'_1}{\mu'_1}\right)^{e_1}} B + A_1\,B,$$

und hier ist A_1 B eine Funktion $(n + \mu_q)^{\text{ten}}$ Grades in y und, nach der Voraussetzung, von der Hauptklasse

$$\left(\frac{\rho'_2}{\mu'_2}\right)^{e_2} \cdots\cdots \left(\frac{\rho'_{q-1}}{\mu'_{q-1}}\right)^{e_{q-1}} \left(\frac{\rho'_q}{\mu'_q}\right)^{e_q}.$$

Es ist nun leicht zu sehen (siehe S. 42—44, dass man die Funktion

$$x^{r_n - \varrho_1} y^{n - \mu_1} \left(\frac{\rho'_1}{\mu'_1}\right)^{e_1} . B$$

in der Form schreiben kann:

$$x^{r_n + \rho_q - \rho_1} y^{n + \mu_q - \mu_1} \left(\frac{\rho'_1}{\mu'_1}\right)^{e_1} + C,$$

worin

$$C = C_0 y^{n + \mu_q - \mu_1} + C_1 y^{n + \mu_q - \mu_1 - 1} + \\ + \ldots + C_{\mu_q} y^{n - \mu_1},$$

und die Ordnungen c_i der Koeffiziente C_i unterliegen folgenden Bedingungen:

$$c_i > r_n + \rho_q - \rho_1 - i . \frac{\rho_q}{\mu_q} = \rho_2 + \rho_3 \ldots + \rho_i - i . \frac{\rho_q}{\mu_q} . \quad ,$$

Setzen wir $g = n + \mu_q - \mu_1 - i$, so ist c_i die Ordnung (in x) des Koeffizienten C_i bei g^{ter} Potenz von y in der Funktion C.

Dieselbe Ordnung des Koeffizienten bei g^{ter} Potenz von y in der Funktion A_1 B ist aber

$$\geqq (g - m'_i) \frac{\rho_i}{\mu_i} + \rho_{i+1} \ldots + \rho_q \quad (i = 2, 3, \ldots, q),$$

und wenn wir beweisen, dass für jedes i

$$r_n + \rho_q - \rho_1 - i \frac{\rho_q}{\mu_q} > (q - m'_i) \frac{\rho_i}{\mu_i} + \rho_{i+1} \ldots + \rho_q$$

ist, so ist gewiss

$$A B = A_1 B + x^{r_n + \rho_q - \rho_1} y^{n + \mu_q - \mu_1} \left(\frac{\rho'_1}{\mu'_1}\right)^{e_1} + C$$

eine Funktion von derselben Hauptklasse *A B*, wie

$$A_1 B + x^{r_n + \rho_q - \rho_1} y^{n + \mu_q - \mu_1} \left(\frac{\rho'_1}{\mu'_1}\right)^{e_1},$$

und unsere Behauptung

$$\left(\frac{\rho'_1}{\mu'_1}\right)^{e_1} . \left(\frac{\rho'_2}{\rho'_2}\right)^{e_2} \ldots . \left(\frac{\rho'_q}{\mu'_q}\right)^{e_q} = \left(\frac{\rho'_1}{\mu'_1}\right)^{e_1} \left(\frac{\rho'_2}{\mu'_2}\right)^{e_2} \ldots . \left(\frac{\rho'_q}{\mu'_q}\right)^{e_q}$$

ist somit in allen ihren Teilen bewiesen.

Dass aber für jedes i

$$c_i > r_n + \rho_q - \rho_1 - i\frac{\rho_q}{\mu_q} > (g - m'_i)\frac{\rho_i}{\mu_i} + \rho_{i+1} \cdot \cdot + \rho_q$$

ist, folgt daraus, dass diese Ungleichheit bei $i = 0$ wirklich gilt, da

$$c_1 > r_n + \rho_q - \rho_1 = \rho_2 + \rho_3 + \cdot \cdot + \rho_q$$

ist, und daraus, dass die Differenz $\frac{\rho_q}{\mu_q}$ zwischen zwei benachbarten Werten

$$r_n + \rho_q - \rho_1 - i\frac{\rho_q}{\mu_q};\ r_n + \rho_q - \rho_1 - (i+1)\frac{\rho_q}{\mu_q}$$

kleiner ist, als die Differenz

$$\frac{\rho_i}{\mu_i} = \frac{\rho_2}{\mu_2}, \frac{\rho_3}{\mu_3}, \ldots, \frac{\rho_{q-1}}{\mu_{q-1}}$$

zwischen zwei benachbarten entsprechenden Werten

$$(g - m'_i)\frac{\rho_i}{\mu_i} + \rho_{i+1} + \cdot \cdot + \rho_q;$$

$$((g-1) - m'_i)\frac{\rho_i}{\mu_i} + \rho_{i+1} + \cdot \cdot + \rho_q.$$

Aus dem Bewiesenen folgt nun unmittelbar der Satz:

„Das Produkt S (y) von zweien Funktionen R (y), P (y), die (in Bezug auf eine bestimmte Primzahl x) zu den Hauptklassen *P*, *Π* gehören, gehört selbst zu der Hauptklasse:

$$\Sigma = P \,.\, \Pi\text{“}.$$

Daraus schliessen wir rückwärts:

VI. „Die Funktion $R(y)_n$, die zu der Hauptklasse

$$H = \left(\frac{\rho'_1}{\mu'_1}\right)^{e_1}\left(\frac{\rho'_2}{\mu'_2}\right)^{e_2} \cdots \left(\frac{\rho'_q}{\mu'_q}\right)^{e_q} \quad \text{(in Bezug auf x)}$$

gehört, kann nur Teiler haben, die selbst zu den Hauptklassen

$$\left(\frac{\rho'_1}{\mu'_1}\right)^{\varepsilon_1}\left(\frac{\rho'_2}{\mu'_2}\right)^{\varepsilon_2} \cdots \left(\frac{\rho'_q}{\mu'_q}\right)^{\varepsilon_q} \quad \text{bei } \varepsilon_i \leqq e_i$$

gehören“. (Vergl. S. 32.)

Dieser Satz ist für den Fall des rationalen Körpers Ω auf funktionaltheoretischen Wegen von Herrn Prof. Koenigsberger (K., I) bewiesen worden.

Die praktische Bedeutung des Satzes ist die folgende: sei uns eine transcendente Zahl $R(y)_n$ gegeben, deren Koeffizienten in Bezug auf irgend eine in ihnen aufgehende Primzahl x von den Ordnungen $r_n, r_{n-1}, \ldots, r_1, r_0$ sind. Wir bestimmen $\rho_1, \ldots, \rho_q; \mu_1, \ldots, \mu_q; e_1, \ldots e_q$ nach den im ersten Kapitel erörterten Methoden. Die Gradzahl ν einer Funktion, die Teiler von $R(y)_n$ sein kann, muss der Gleichung genügen:

$$\nu = \varepsilon_1 \mu'_1 + \varepsilon_2 \mu'_2 \ldots + \varepsilon_q \mu'_q \quad \text{bei } 0 \leqq \varepsilon_i \leqq e_i \ldots (J).$$

Wir können solche Einschränkungen von ν für alle möglichen in R_n aufgehenden Primzahlen x, und dann auch (mittels der Substitution $y = \frac{1}{z}$) für die in R_0 aufgehenden bestimmen. Die Funktion $R(y)_n$ kann nur Teiler haben, deren Gradzahlen ν durch keine von diesen Einschränkungen ausgeschlossen bleiben, was oft auf die Irreduktibilität einer gegebenen Funktion $R(y)_n$ zu schliessen gestattet.

Sei uns beispielsweise die Funktion

$$a_0 p^3 q^3 y^5 + a_1 p^3 q^3 y^4 + a_2 p^2 q^2 y^3 + a_3 p q y^2 + a_4 p y + a_5$$

vorgelegt, worin p, q zwei verschiedene Primzahlen, a^i nicht durch p oder q teilbar sind.

Diese Funktion gehört zu den Klassen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ in Bezug auf q,}$$

und

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ in Bezug auf p.}$$

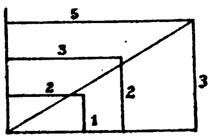
Aus dem Symbol $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ergiebt sich:

$$\frac{3-2}{5-3} = \frac{1}{2}; \quad \frac{3-1}{5-2} = \frac{2}{3}; \quad \frac{3-0}{5-1} = \frac{3}{4};$$

und da $\frac{3}{4} > \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ ist, so ist $\frac{\rho'_1}{\mu'_1} = \frac{3}{4}$; $\frac{\rho'_2}{\mu'_2} = \frac{0}{1}$ (in Bezug auf q), und:

$$v = \varepsilon_1 4 + \varepsilon_2 1 \quad \text{bei } \varepsilon_1, \varepsilon_2 = 0 \text{ oder } 1.$$

In Bezug auf p aber ergiebt die Konstruktion des Newton'schen Parallelogrammes:



$$\frac{\rho'_1}{\mu'_1} = \frac{2}{3}; \; \frac{\rho'_2}{\mu'_2} = \frac{1}{2},$$

also

$$v = \eta_1 3 + \eta_2 2 \quad \text{bei } \eta_1, \eta_2 = 0 \text{ oder } 1.$$

Ausser $v = 0$ und $v = 5$ giebt es kein v, welches den beiden Einschränkungen genügt, und folglich ist unsere Funktion eine irreduktible. (Vergl. K., II, Seite 342, wo diese Funktion als eine irreduktible a priori konstruiert worden ist.)

ZWEITER TEIL.

Anhang.

Ueber Irreduktibilität von Differentialgleichungen.

Erstes Kapitel.

Lineare homogene Differentialgleichungen.

§ 14. Wir verstehen auch hier unter einer rationalen Funktion R (x) der unabhängigen Variablen x eine jede Funktion von x, die sich um den Punkt $x = 0$ in eine konvergente, nach steigenden Potenzen von x geordnete Reihe entwickeln lässt, so dass

$$R(x) = x^{\rho} \sum_{t=0}^{t=\infty} R_t x^t ,$$

worin ρ eine ganze positive oder negative Zahl ist. Die Summe, die Differenz, das Produkt und der Quotient zweier rationalen Funktionen R_1, R_2 sind ebenfalls rationale Funktionen $R_1 \pm R_2$, $R_1 \cdot R_2^{\pm 1}$. Dasselbe gilt auch von den successiven Ableitungen $R', \ldots, R^{(\nu)}, \ldots$ einer rationalen Funktion R.

Unter einer rationalen algebraischen Gleichung

$$R(x, y) = 0$$

verstehen wir eine jede Gleichung, die in Bezug auf x in obigem Sinne rational, in Bezug auf die zu bestimmende Funktion y algebraisch ganz ist, d. h., nur endliche ganze Potenzen von y oder dessen Ableitungen enthält. Es ist allgemein bekannt, was unter dem Grade und der Ordnung

einer solchen Gleichung zu verstehen ist. Ist die Ordnung der Gleichung $R(x, y) = 0$ gleich Null, so heisst sie Funktionalgleichung, in anderen Fällen aber Differentialgleichung.

Wir nennen eine Gleichung reduktibel, wenn sie mit einer gleichartigen Gleichung niederen Grades oder niederer Ordnung eine gemeinsame Lösung hat; im entgegengesetzten Fall soll die Gleichung irreduktibel heissen.

§ 15. Sei uns zunächst eine Funktionalgleichung vorgelegt:

$$R(x, y) \equiv R(y)_n \equiv R_{xo}\, y^0 + \ldots + R_{xk}\, y^k + \ldots + R_{xn}\, y^n = 0,$$

worin R_{xk} ganze Funktionen von x sind:

$$R_{xk} \equiv \sum_{t=0}^{t=\infty} R_{kt}\, x^t \,,$$

so soll sie, wenn sie reduktibel ist, in zwei gleichartige Gleichungen ν^{ten} und $(n - \nu)^{ten}$ Grades zerfallen:

$$R(y)_n \equiv S(y)_{n-\nu} \,.\, Q(y)_\nu \,.$$

Ordnen wir hier beide Seiten nach Potenzen von x, so dass

$$R(y)_n \equiv R_{y0}\, x^0 + R_{y1}\, x^1 + \ldots + R_{yt}\, x^t + \ldots,$$

worin

$$R_{yt} = R_{ot}\, y^0 + \ldots + R_{kt}\, y^k + \ldots + R_{nt}\, y^n,$$

und bei analogen Bezeichnungen:

$$S(y)_{n-\nu} = S_{yo}\, x^0 + \ldots + S_{y,t-h}\, x^{t-h} + \ldots$$
$$Q(y)_\nu = Q_{yo}\, x^0 + \ldots + Q_{y,h}\, x^h + \ldots,$$

so erhalten wir für $t = 0, 1, 2, \ldots, \infty$:

$$R_{yt} = \sum_{h=0}^{h=t} Q_{y,h} \,.\, S_{y,t-h} \ldots (T).$$

Bezeichnen wir allgemein mit $(K_z) = k$ den Grad einer ganzen Funktion K (z) in z, so können wir noch schreiben:

$$(R_{yt}) \leqq \max.\, (Q_{yh} \,.\, S_{y,t-h})_{h=o}^{h=t}$$

oder:

$$r_t \leqslant q_h + s_{t-h} \qquad (h = 0, 1, \ldots, t) \ldots (\mathbf{t}).$$

(Der Fall $r_t < q_h + s_{t-h}$ kann nur bei polymaximalen Systemen $(q_h + s_{t-h})$ vorkommen.)

Wir können das Resultat obiger Untersuchung in der folgenden Form aussprechen:

A. „Die notwendigen, wenn auch nicht hinreichenden Bedingungen der Reduktibilität einer algebraischen Funktionalgleichung n^{ten} Grades auf eine gleichartige Gleichung ν^{ten} Grades besteht darin, dass (für ein $\nu < n$) sich die Zahlen q_i, s_j $(i, j = 0, 1, \ldots, \infty)$ so bestimmen lassen, dass

$$\left.\begin{array}{l} \max.\ q_i = \nu;\quad \max.\ s_j = n - \nu \\ \max.\ (q_h + s_{t-h})_{h=0}^{h=t} = r_t\ (t = 0, 1, \ldots, \infty) \end{array}\right\} \ldots (\mathbf{t}).$$

Dabei ist ν der Grad der rationalen algebraischen Funktionalgleichung, welche alle ihre Lösungen mit der vorgelegten gemeinsam haben kann."

§ 16. Sei uns jetzt eine lineare homogene Differentialgleichung vorgelegt:

$$R(x, y) \equiv R(y)_n \equiv x^0 R_{xo}\, y^{(o)} + \ldots + \\ + x^k R_{xk}\, y^{(k)} + \ldots + x^n R_{xn}\, y^{(n)} = 0.$$

Ist sie reduktibel, so soll die Identität stattfinden:

$$R(y)_n \equiv S_{xo}\, x^0\, Q_\nu^{(o)} + \ldots + S_{x, n-\nu} \,.\, x^{n-\nu} \,.\, Q_\nu^{(n-\nu)},$$

worin S_{xq} wiederum rationale Funktionen von x sind, und $Q_\nu = 0$ die Differentialgleichung ν^{ter} Ordnung bedeutet, welche mit der vorgelegten alle ihre Integrale gemeinsam hat.

Und in diese Identität wollen wir, nach dem Vorgang von Herrn Prof. Koenigsberger, $y = x^u$, also $x^k y^{(k)} = (u)^k x^u$, worin $(u)^k = u(u-1) \ldots (u-k+1)$, einsetzen; dann erhalten wir:

$$x^{-u} R(x^u) \equiv R_{xo}(u)^0 + \ldots + R_{xn}(u)^n$$

$$Q(x^u) = (Q_{xo}(u)^0 + \ldots + Q_{x\nu}(u)^\nu)\, x^u,$$

und wenn wir die letztere Gleichung nach Potenzen von x entwickeln, indem wir

$$Q_{oh}(u)^0 + \ldots + Q_{\nu h}(u)^\nu \equiv Q_{(u)h}$$

setzen,

$$Q(x^u) \equiv Q_{(u)o}\, x^u + \ldots + Q_{(u)h}\, x^{u+h} + \ldots,$$

also

$$x^k\, Q_\nu^{(k)} \equiv (u)^k\, Q_{(u)o}\, x^u + \ldots + (u+h)^k\, Q_{(u)h}\, x^{u+h} + \ldots$$

So wird unsere Identität, nach Ausführung aller Substitutionen, die Form annehmen:

$$R_{xo}(u)^0 + \ldots + R_{xn}(u)^n \equiv \sum_{k=0}^{k=n-\nu} S_{x,n-\nu-k}\left((u)^k\, Q_{(u)o}\, x^0 + \ldots\right).$$

Entwickeln wir auch hier die beiden Seiten nach Potenzen von x, so erhalten wir bei den früheren analogen Bezeichnungen:

$$R_{(u)t} \equiv \sum_{h=0}^{h=t} \sum_{k=0}^{k=n-\nu} Q_{(u)h}\,(u+h)^k\, S_{n-\nu-k,\,t-h}\,.$$

Setzen wir jetzt in die rechten Seiten dieser Gleichungen überall y^k an Stelle von $(u+h)^k$ ein, so erhalten wir:

$$\sum_{i=0}^{i=n} R_{it}\, y^i \equiv \sum_{h=0}^{h=t} (Q_{oh}\, y^0 + \ldots + Q_{\nu h}\, y^\nu)\,(S_{o,t-h}\, y^0 + \ldots + S_{n-\nu,t-h}\, y^{n-\nu}),$$

und der Grad dieser Ausdrücke in y bleibt dem der früheren in u gleich. Daraus folgt der für die ganze folgende Untersuchung wichtige Satz:

B. „Wenn eine vorgelegte Differentialgleichung

$$R \equiv R_{xo}\, y^{(o)} + \ldots + x^k\, R_{xk}\, y^{(k)} + \ldots + x^n\, R_{xn}\, y^{(n)} = 0$$

reduktibel ist, und

$$Q \equiv Q_{xo}\, y^{(o)} + \ldots + x^\nu\, Q_{x\nu}\, y^{(\nu)} = 0$$

die Differentialgleichung niederer Ordnung ist, welche alle ihre Integrale mit der vorgelegten gemeinsam hat, so dass die Identität stattfindet:

$$R \equiv S_{xo}\, Q + \ldots + x^{n-\nu}\, S_{x,n-\nu}\, Q^{(n-\nu)}\,,$$

so hat die algebraische reduktible Gleichung

$$(Q_{xo}\, y^0 + \ldots + Q_{x\nu}\, y^\nu)\,(S_{xo}\, y^0 + \ldots + S_{x,n-\nu}\, y^{n-\nu}) = 0$$

mit der Funktionalgleichung

$$R_{xo}\, y^0 + \dots + R_{xn}\, y^n = 0$$

die gemeinsame Eigenschaft, dass, wenn die beiden Gleichungen nach Potenzen von x entwickelt werden, ihre Koeffizienten bei den gleichen Potenzen von x Funktionen in y von gleichem Grade sind."

Aus diesem Satze ziehen wir zunächst den folgenden unmittelbaren Schluss:

C. „Die Bedingungen

$$\left.\begin{array}{l} \max.\ q_i = \nu < n;\quad \max.\ s_j = n - \nu < n \\ \max.\ (q_h + s_{t-h})_{h=0}^{h=t} \geqq r_t \end{array}\right\} \dots (\mathbf{t})$$

sind auch dafür notwendig, dass eine rationale Differentialgleichung $Q_\nu = 0$ ν^{ter} Ordnung existiert, welche mit der vorgelegten Differentialgleichung $R_{(n)} = 0$ n^{ter} Ordnung $(n > \nu)$ alle ihre Integrale gemeinsam hat".

Oder mit anderen Worten:

D. „Die Zahlen ν, welche den Bedingungen (**t**) genügen, geben zu gleicher Zeit den Grad, resp. die Ordnung aller der Gleichungen an, welche mit der vorgelegten Funktionalgleichung:

$$R_{xo}\, y^0 + \dots + R_{xk}\, y^k + \dots + R_{xn}\, y^n = 0,$$

resp. mit der Differentialgleichung:

$$R_{xo}\, y^{(o)} + \dots + x^k R_{xk}\, y^{(k)} + \dots + x^n R_{xn}\, y^{(n)} = 0$$

(bei gegebenen $R_{xo}, \dots R_{xk}, \dots R_{xn}$) alle ihre Lösungen gemeinsam haben können".

Die Methode der Einschränkung der Werte von ν mittels der Bedingungen (**t**) ist im Wesentlichen die von Herrn Prof. Koenigsberger (siehe K., III) benutzte; so gelten denn alle daselbst für die Differentialgleichungen aufgestellten Sätze zugleich auch für die Funktionalgleichungen. Später werden wir zeigen, dass man dieselben Resultate in einer viel umfassenderen und präziseren Form, ohne die Formeln (**t**) direkt zu benutzen, aus dem Satze VI (S. 32) erhalten kann; wir halten es jedoch für ratsam,

hier den Weg anzudeuten, auf welchem man mit Hilfe dieser Formeln (t) zu den Irreduktibilitätskriterien gelangen kann, um nachher die Vorteile der oben (S. 48) angegebenen allgemeinen Formel (J) deutlicher hervortreten zu lassen.

§ 17. Zunächst haben wir

$$q_0 \leqq \nu; \quad s_0 \leqq n - \nu$$
$$r_0 = q_0 + s_0,$$

und, da wir $q_0 = 0$ oder $s_0 = 0$ setzen dürfen:

$$n \geqq \nu \geqq 0;$$

es ist also ν noch gar nicht eingeschränkt.

Wir fügen nun noch die Bedingungen hinzu:

$$q_1 \leqq \nu; \quad s_1 \leqq n - \nu$$
$$r_1 \leqq \max.\ (q_0 + s_1,\ q_1 + s_0).$$

Ist $r_1 < r_0$, so können wir, nachdem wir $\nu \geqq q_0$, $n - \nu \geqq s_0$ bestimmt haben, $s_1 < s_0$, $q_1 < q_0$ annehmen, erhalten also wieder keine Einschränkung für ν. Ist jedoch $r_1 > r_0$, so sind drei Möglichkeiten bei der Bestimmung von s_1, q_1 zu unterscheiden:

1. $r_1 = q_0 + s_1 \geqq q_1 + s_0;$
2. $r_1 = q_1 + s_0 \geqq q_0 + s_1;$
3. $r_1 < q_1 + s_0 = q_0 + s_1.$

Die erste von diesen Möglichkeiten giebt uns:

$$s_0 = r_0 - q_0 \qquad q_0 = r_0 - s_0$$
$$s_1 = r_1 - q_0 \qquad q_1 < r_1 - s_0,$$

und da $r_1 > r_0$,

$$\nu \geqq r_0 - s_0 = q_0 \qquad n - \nu \geqq r_1 - q_0,$$

also, da $r_0 \geqq q_0 \geqq 0$ ist:

$$n - (r_1 - r_0) \geqq \nu \geqq 0.$$

Ebenso giebt die zweite Möglichkeit:

$$n \geqq \nu \geqq r_1 - r_0.$$

Es geben also die zwei Möglichkeiten zusammen folgende Einschränkungen für ν:

$$n - (r_1 - r_0) \geqq \nu; \quad \nu \geqq (r_1 - r_0) \ . \ . \ . \ (E).$$

Diese Einschränkungen werden scheinbar, d. h., sie lassen jeden Wert von v zu, wenn

$$\frac{n}{2} \geqq r_1 - r_0 \text{ ist,}$$

denn sie werden in diesem Falle zu den folgenden

$$\frac{n}{2} \geqq v; \quad v \geqq \frac{n}{2}.$$

Wenden wir uns jetzt der dritten Möglichkeit zu:

$$s_0 = r_0 - q_0 \qquad q_0 = r_0 - s_0$$
$$s_1 = r_1 - q_0 + x \qquad q_1 = r_1 - s_0 + x,$$

worin $x \geqq 0$, so erhalten wir, da $q_1 + s_1 \leqq n$,

$$n \geqq 2\,r_1 - r_0 + 2\,x,$$

um so mehr also

$$\frac{n}{2} \geqq r_1 - r_0,$$

als notwendige Bedingung für diese Möglichkeit; da aber im Falle $\frac{n}{2} \geqq r_1 - r_0$ schon die ersten zwei Möglichkeiten jeden Wert für v zuliessen, so bleiben die Einschränkungen

$$n - (r_1 - r_0) \geqq v; \; v \geqq (r_1 - r_0) \; . \; . \; . \; (E)$$

(die auch für $r_1 \leqq r_0$ gelten) die allgemeinsten, welche man aus den Bedingungen (**t**) für $t = 0, 1$ nur erhalten kann.

Um in der Einschränkung von v weiter gehen zu können, müssen wir nun noch die Bedingung

$$r_2 \leqq \max. \, (q_0 + s_2, \; q_1 + s_1, \; q_2 + s_0)$$

berücksichtigen, dann auch die Bedingung:

$$r_3 \leqq \max. \, (q_0 + s_3, \; q_1 + s_2, \; q_2 + s_1, \; q_3 + s_0),$$

u. s. w. Die Untersuchung wird immer komplizierter, während es unmöglich scheint, zu einem allgemeinen Resultate zu gelangen, schon wegen der unendlich grossen Anzahl der Bedingungen.

Dies alles veranlasst uns, die Untersuchung auf einen anderen Weg zu lenken, welcher von den Bedingungen (**t**) in ihrer jetzigen Form möglichst unabhängig sein soll.

§ 18. Einen solchen Weg eröffnet uns der Satz I (S. 13), aus welchem wir ohne weiteres schliessen:

F. „Die Bedingungen (t) sind für zwei Gleichungen $A = 0$, $B = 0$ nur dann identisch, wenn dieselben zu einer und derselben Klasse $\binom{t_0, t_1, \ldots, t_s}{u_0, u_1, \ldots, u_s}$ gehören."

Dass aber umgekehrt für alle Gleichungen, die zu einer und derselben Klasse gehören, die Bedingungen (t) zwar nicht identisch lauten, jedoch dieselben Einschränkungen für v ergeben, lässt sich aus der im Anfang dieser Arbeit erörterten Invarianteneigenschaft der Hauptzahlen und Indices allein vermuten und auch folgendermassen bestätigen.

Multiplizieren wir eine Gleichung:

$$R(x, y) = R_{y_0}\, x^0 + R_{y_1}\, x^1 + \ldots + R_{xt}\, y^t + \ldots$$

mit einer beliebigen konvergenten Reihe:

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots,$$

so nimmt sie die folgende Gestalt an:

$$P(x,y) = P_{y_0} x^0 + P_{y_1} x^1 + \ldots + P_{yt} x^t + \ldots = 0,$$

wobei
$$P_{yt} = \sum_{h=o}^{h=t}{}' A_h R_{y,\,t-h},$$

und die A_h Konstanten sind. Es ist:

$$(P_{yt}) = p_t = \max.\,((R_{y_0}), (R_{y_1}), \ldots, (R_{yt}))$$

oder
$$p_t = \max.\,(r_0, r_1, \ldots, r_t)$$

bei monomaximalem System $(r_0, r_1, \ldots, r_t)$, und

$$p_t \leqslant \max.\,(r_0, r_1, \ldots, r_t)$$

bei polymaximalem System $(r_0, \ldots, r_t)$. Es ist aber immer möglich, die Konstanten A_h so zu wählen, dass für jedes t

$$p_t = \max.\,(r_0, r_1, \ldots, r_t)$$

wird, so dass die Reihe $p_0, p_1, \ldots, p_t, \ldots$ eine überall steigende wird, folglich nur die Hauptindices der Gleichung $R(x,y) = 0$ enthält. Es ist nun klar, dass durch die oben ausgeführte Multiplikation, also auch durch den daraus folgenden Uebergang von der Reihe $r_0, r_1, \ldots r_t \ldots$ zu der Reihe $p_0, p_1, \ldots, p_t, \ldots$ die Bedingungen (t) sich

nicht wesentlich ändern können, oder dass nur die Hauptzahlen t_i und die Hauptindices u_i der Gleichung $R(x, y) = 0$ in den Einschränkungen von ν mittels der Bedingungen ($\mathfrak{t}$) wirklich enthalten sein müssen.

Von einem strengeren Beweise dieses Satzes sehen wir ab, da er im weiteren keine Rolle spielt; es mag nur noch erwähnt werden: der Umstand, dass wir für ν keine Einschränkungen bekommen haben, wenn $r_1 < r_0$ war (siehe Formel E), könnte als spezieller Fall des angedeuteten Satzes angesehen werden.

Im Falle $r_1 > r_0$ sind r_1, r_0 die Hauptindices der Hauptzahlen 1, 0. Daraus erhellt aber, dass unsere Formel (E) folgende Sätze aus der Arbeit (K., III) von Herrn Prof. Koenigsberger als partikuläre Fälle in sich enthält: (8), S. 4; (39), S. 19; den Satz auf S. 28 u. a. m.

Wir wollen weiter die Wahrscheinlichkeit der Vermutung, dass die Resultate, zu welchen man gelangen kann, indem man ν mittels der Formeln ($\mathfrak{t}$) einschränkt, keine anderen sein können, als die im Satze VI (S. 32) und der Formel (J) (S. 48) enthaltenen, noch dadurch vergrössern, dass wir aus dem Inhalt des Satzes VI die Formel (E) direkt ableiten.

Wir fassen alle Gleichungen von den Klassen

$$\begin{pmatrix} t_0, & \ldots, & t_{s-2}, & 1, & 0 \\ u_0, & \ldots, & u_{s-2}, & r_1, & r_0 \end{pmatrix}$$

zusammen, worin $t_0, \ldots, t_{s-2} > 1$, weiter aber nicht definiert sind. Deshalb sind auch die Grössen

$$\frac{\rho_1}{\mu_1}, \ldots, \frac{\rho_{k-1}}{\mu_{k-1}}$$

unbestimmt. Was aber $\frac{\rho_k}{\mu_k}$ betrifft, so ist, wie aus der Idee des Newton'schen Parallelogrammes leicht zu ersehen:

$$\frac{\rho_k}{\mu_k} = \min. \left(\frac{t_i - t_{i_k}}{u_i - u_{i_k}}\right), \quad i = 0, 1, \ldots, i_k - 1,$$

und es ist in unserem Falle $t_{i_k} = t_s = 0$; $u_{i_k} = u_s = r_0$;

folglich:

$$\frac{\rho_k}{\mu_k} = \min. \left(\frac{t_i}{u_i - r_0}\right).$$

Ist jetzt

$$\min. \left(\frac{t_i}{u_i - r_0}\right) < \frac{1}{r_1 - r_0},$$

so können wir auf kein bestimmtes, zugleich für alle in Betracht gezogenen Gleichungen geltendes Resultat rechnen. Dies ist natürlich nur dann möglich, wenn für irgend ein $t > 1$ und $u > r_1$

$$\frac{t}{u - r_0} < \frac{1}{r_1 - r_0},$$

also

$$r_1 - r_0 < \frac{u - r_0}{t},$$

um so mehr (da $u - r_0 \leqq n$, $t \geqq 2$) nur wenn

$$r_1 - r_0 \leqq \frac{n}{2}$$

wird.

Ist aber

$$\min. \left(\frac{t_i}{u_i - r_0}\right) = \frac{1}{r_1 - r_0},$$

so ergiebt uns die Formel (J):

$$\nu = \eta_k (r_1 - r_0) + z,$$

bei $\eta_k = 1, 0$ und $z \leqq n - (r_1 - r_0)$. Also haben wir:

$$\left.\begin{array}{ll} 1.\ \text{für } r_1 - r_0 \leqq \frac{n}{2}: & \nu \text{ unbestimmt;} \\ 2.\ \text{für } r_1 - r_0 > \frac{n}{2}: & \nu \geqq r_1 - r_0 \quad (\text{bei } \eta_k = 1), \\ & \nu \leqq n - (r_1 - r_0) \ (\text{bei } \eta_k = 0). \end{array}\right\}$$

Dies ist aber genau der Inhalt der Formel (E).

§ 19. Dehnen wir nun die Begriffe der Hauptzahlen, ihrer Indices und der dadurch definierten Klassen und Hauptklassen auf die linearen homogenen Differentialgleichungen aus, so können wir das Ergebnis des Satzes B in folgender Form aussprechen:

G. „Eine Differentialgleichung

$$x^n R_{xn} y^{(n)} + \ldots + x^k R_{xk} y^{(k)} + \ldots + x^o R_{xo} y^{(o)} = 0,$$

die zur Klasse

$$\begin{pmatrix} t_0 & \ldots & t_s \\ u_0 & \ldots & u_s \end{pmatrix}$$

gehört, ist nur reduktibel, insofern die algebraischen Gleichungen von der Klasse

$$\begin{pmatrix} t_0 & \ldots & t_s \\ u_0 & \ldots & u_s \end{pmatrix},$$

zu welchen die Gleichung

$$R_{xn} y^n + \ldots + R_{xk} y^k + \ldots + R_{xo} = 0$$

gehört, reduktibel sind.“

Oder mit anderen Worten:

G. „Eine lineare homogene Differentialgleichung, die zu der Hauptklasse

$$H = \left(\frac{\rho'_1}{\mu'_1}\right)^{e_1} \left(\frac{\rho'_2}{\mu'_2}\right)^{e_2} \ldots \left(\frac{\rho'_k}{\mu'_k}\right)^{e_k}$$

gehört, kann nur auf gleichartige Differentialgleichungen reduktibel sein, die zu den Hauptklassen

$$\left(\frac{\rho'_1}{\mu'_1}\right)^{\varepsilon_1} \left(\frac{\rho'_2}{\mu'_2}\right)^{\varepsilon_2} \ldots \left(\frac{\rho'_k}{\mu'_k}\right)^{\varepsilon_k} \text{ bei } \varepsilon_k \leqq e_k$$

gehören.“

Daraus erhalten wir für ν den folgenden Ausdruck:

$$\nu = \varepsilon_1 \mu'_1 + \ldots + \varepsilon_k \mu'_k, \quad \text{bei } \varepsilon_k \leqq e_k \ldots (J).$$

Dieses von uns gewonnene Resultat für die Differentialgleichungen (sowie für die transcendenten Zahlen $R(y)_n$ eines beliebigen Körpers) ist bei weitem nicht so umfangreich, wie das oben im ersten Kapitel ersten Teiles für die Funktionalgleichungen aufgestellte. Die Formel (J) lässt nur entscheiden, wie gross ν sein **kann**, sie sagt aber nichts darüber, wie gross ν sein **muss**. Ausserdem versagt sie, wenn

$$u_s \geqq \frac{n}{2},$$

denn setzen wir $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_{k-1} = 0$ ($e_k = u_s$), so erhalten wir:

$$\nu \leqq u_s ,$$

während für $\varepsilon_1 = e_1, \ldots, \varepsilon_{k-1} = e_{k-1}$, die Formel ergiebt:

$$\nu \geqq n - u_s ,$$

oder

$$n - u_s \leqq \nu$$

Ist jetzt $u_s \geqq \frac{n}{2}$, so sind überhaupt alle Werte von ν zwischen 0 und n zulässig.

Natürlich rühren diese Nachteile unserer Formel daher, dass sie nicht aus der unmittelbaren Untersuchung der Integralfunktion abgeleitet wurde, während wir doch im Falle der Funktionalgleichungen die Zweige der Funktion y direkt behandelten. Die Hauptzahlen der Differentialgleichung sollen in einer gewissen Beziehung zu ihren Integralgruppen und ihrer Fundamentalgleichung (für den Punkt $x = 0$) stehen. Die Auffindung dieser Beziehung, welche mir bis jetzt nicht gelungen ist, würde zweifelsohne eine viel vollkommenere Beantwortung der Frage über die Irreduktibilität der linearen homogenen Differentialgleichungen, als die durch Formel (J) dargestellte, ergeben.

Vorläufig haben wir beispielsweise folgende Sätze für lineare homogene Differentialgleichungen gewonnen:

I. „Die Differentialgleichung:

$$R_n x^{r_0 + n\rho} y^{(n)} + \ldots + R_k x^{r_{n-k} + k\rho} y^{(k)} + \ldots + R_0 x^{r_n} y^{(0)} = 0,$$

worin $r_n = 0$; $r_{n-k} + k(\rho - 1) > 0$, $r_0 \leqq r_1, \ldots, r_{n-1}$, (um so mehr also $\frac{r_0 + n\rho}{n} < \frac{r_k + k\rho}{n-k}$) kann nur mit einer gleichartigen Differentialgleichung von der Ordnung $\nu = \eta . \frac{n}{r_0}$ gemeinsame Integrale haben, worin $\eta < r_0$ eine ganze Zahl bedeutet."

In diesem Satze sind die folgenden Sätze enthalten, die von Herrn Prof. Koenigsberger angegeben worden sind:

(K., III), S. 21—27 (für $r_0 = 2, 3, 4, 5$; $\rho = 1$); S. 29; auch S. 4, 5 (für $\rho = 2$ und spezielle Werte von r_0) und mehrere andere, z. B., der dem Eisenstein'schen Satze analoge Satz von Floquet.

II. Als zweites Beispiel wollen wir die Differentialgleichung

$$E^n x^{r_n + n} y^{(n)} + \ldots + E_0 y = 0$$

betrachten, für welche $r_n \leqslant r_{n-1}, \ldots, r_2 > r_1 = 0 < r_0$ ist. Für diese Gleichung ist

$$\frac{\rho_1}{\mu_1} = \frac{r_n}{n-1}, \; k = 2; \; \frac{\rho_2}{\mu_2} = \frac{0}{2};$$

folglich ist

$$\nu = \alpha \frac{(n-1)}{r_n} + \beta,$$

worin $\alpha < r_n$, $\beta = 0, 1$ ist. Für den Fall $r_n = 2$ ergiebt sich z. B.

$$\nu = 1, \; n-1, \; \frac{n-1}{2}, \; \frac{n+1}{2};$$

wie es in der That von Herrn Prof. Koenigsberger mittels der Methode der Bedingungen (t) gefunden worden ist (K., III, S. 21—22).

Zweites Kapitel.

Weiteres über Irreduktibilität von Differentialgleichungen.

§ 20. Die Substitution $y = x^u$ kann mit Erfolg auch auf homogene Differentialgleichungen angewendet werden.

In der That haben wir zwei Differentialgleichungen $P = 0$, $Q = 0$ von der n^{ten} und ν^{ten} Ordnung ($\nu < n$), welche in Bezug auf $y^{(n)}$ und $y^{(\nu)}$ algebraisch irreduktibel sind, so soll, falls $Q = 0$ alle ihre Integrale (von den singulären abgesehen) mit $P = 0$ gemein hat, die Identität sattfinden:

$$\left(\frac{\partial Q}{y^{(\nu)}}\right)^s . \, P \equiv F(x, y, Q),$$

worin F eine in Bezug auf x mit P und Q gleichartige Funktion von Q, Q', . . ., $Q^{(n-\nu)}$ bedeutet, deren von Q und ihren Ableitungen freies Glied gleich Null ist, s eine ganze Zahl. Da diese Beziehung identisch ist, sollen die homogenen Teile von demselben Grade in y, y', . . . , $y^{(n)}$ an ihren beiden Seiten einzeln einander gleich sein. Hat nun der Differentialausdruck $\frac{\partial Q}{\partial y^{(\nu)}}$ ein von y und deren Ableitungen freies Glied Q_0 und ist der lineare homogene Teil von P gleich P_1, der von Q gleich Q_1, so haben wir

$$Q_0^s \cdot P_1 \equiv \Phi(Q_1, x),$$

d. h., die lineare homogene Gleichung $P_1 = 0$ soll auf $Q_1 = 0$ reduktibel sein. So haben wir den Satz:

H. „Eine homogene algebraische Differentialgleichung $P = 0$, deren linearer Teil P_1 von der Ordnung n ist, kann auf eine gleichartige Differentialgleichung $Q = 0$, deren linearer Teil Q_1 von der Ordnung $\nu \leqslant n$ ist, nur dann reduktibel sein, wenn die lineare homogene Differentialgleichung $P_1 = 0$ auf die Differentialgleichung $Q_1 = 0$ von der Ordnung ν reduktibel ist."

In diesem Resultate sind als partikuläre Fälle alle Sätze enthalten, die in der Arbeit (K., IV) aufgestellt sind.

§ 21. Wir können aber auch noch weiter gehen. Ist $\frac{\partial Q}{\partial y^{(\nu)}}$ von y und deren Ableitungen unabhängig, d. h., eine rationale Funktion von x allein, so können wir beide Seiten unserer Identität durch $\left(\frac{\partial Q}{\partial y^{(\nu)}}\right)^s$ dividieren und erhalten dann:

$$P \equiv F(y, Q),$$

worin F in Bezug auf y, y', . . . , $y^{(n)}$ algebraisch ganz, in Bezug auf x rational ist. Setzen wir wieder

$$y = x^u, \ldots, x^k y^{(k)} = (u)^k \cdot y \ldots$$

in diese Identität ein, entwickeln beide Seiten nach Potenzen von x und vergleichen die rechte Seite der Identität mit dem Ausdrucke $\Phi(y, u)$, welcher aus ihr enthalten wird, wenn überall u^k statt $(iu + h)^k$ gesetzt wird, so ergiebt

sich, dass die Koeffizienten bei gleichen Potenzen von x in den beiden Ausdrücken Funktionen von demselben Grade in y und u sind. Ausserdem ist der Ausdruck Φ (y, u) ein reduktibler und erhält den Ausdruck als Faktor, welcher aus dem Differentialausdrucke Q durch die Substitution $x^k y^{(k)} = y \cdot u^k$ erhalten wird.

In der That erhält der Differentialausdruck Q (y) nach der Substitution $y = x^u$, wie leicht zu sehen, die Form:

$$Q(x^u) = \Sigma' Q_{ij}\, x^{iu+j},$$

worin Q_{ij} Konstanten sind, welche von u algebraisch ganz abhängen, i von 0 bis auf einen endlichen Wert, j von 0 bis auf $+\infty$ läuft. Differentiieren wir diesen Ausdruck nach x und multiplizieren mit x, so erhalten wir:

$$x\, Q'(x^u) = \Sigma' (iu + j)\, Q_{ij}\, x^{iu+j}$$

Setzen wir jetzt überall u^k statt $(iu + j)^k$, so wird:

$$Q(x^u) \quad = \quad G(u, x^u)$$
$$\text{für } (iu + j)^k = u^k$$
$$x \cdot Q'(x^u) \quad = \quad u\, G'(u, x^u)$$
$$\text{für } (iu + j)^k = u^k$$

Aehnliches gilt natürlich für alle Ausdrücke $x^k Q^{(k)}(x^u)$, und da F (x, y, Q) kein von Q oder deren Ableitungen freies Glied hat, so ist unsere Behauptung bewiesen.

Nennen wir die algebraische Funktionalgleichung P (y, u) = 0, welche aus der Differentialgleichung P (y) = 0 entsteht, wenn darin $y^{(k)} \cdot x^k$ überall durch $y \cdot u^k$ ersetzt wird, die G e f ä h r t i n der Differentialgleichung P = 0, so können wir den Satz, dessen partikulärer Fall der Satz B ist, in folgender allgemeinen Form aussprechen:

K. „Ist eine Differentialgleichung P = 0 auf eine gleichartige Differentialgleichung Q = 0 reduktibel, welche in der Form:

$$Q \equiv y^{\nu} - R = 0$$

geschrieben werden kann, worin R in Bezug auf x mit P gleichartig, in Bezug auf y, y', . . . algebraisch ganz und höchstens von der Ordnung $\nu - 1$ ist, so hat eine Funktionalgleichung, die auf die Gefährtin von Q = 0 reduktibel

ist, mit der Gefährtin von $P = 0$ die gemeinsame Eigenschaft, dass die Koeffizienten dieser beiden Gleichungen, wenn sie nach Potenzen von x entwickelt werden, bei gleichen Potenzen von x Funktionen in u und y sind, deren Gradzahlen in u sowie in y übereinstimmen.“

§ 22. Haben wir eine Funktionalgleichung:

$$M \equiv M_0 + M_1 x + \ldots M_t x^t \ldots = 0$$

worin die Koeffizienten M_i Funktionen vom Grade a_i in y, b_i in u sind, so ordnen wir dieselbe wiederum nach Potenzen von y, u; wir erhalten:

$$M = \Sigma P_{kq} y^k u^q = 0$$

Mögen die Ordnungen der Koeffizienten P_{kq} (in Bezug auf x) mit p_{kq} bezeichnet werden. Die Glieder von der Form $ay^k u^q$, worin a eine Konstante ist, können nur in solchen Summen M_i als Summanden auftreten, für welche $a_i \geqq k$, $b_i \geqq q$ ist; giebt es ein M_t, für welches

$$a_t = k \geqq (a_1, \ldots, a_{t-1})$$
$$b_t = q \geqq (b_1, \ldots, b_{t-1}),$$

und ist es das erste in der Reihe $M_0, M_1, \ldots, M_t, \ldots,$ welches diese Eigenschaften besitzt, so ist

$$p_{kq} = t.$$

So bestimmen wir direkt die Grössen $p_{k_1 q_1}, \ldots, p_{k_s q_s}$, für welche

$$p_{k_i q_i} = t_i,$$
$$a_{t_i} = k_i \geqq (a_1, \ldots, a_{t-1})$$
$$b_{t_i} = q_i \geqq (b_1, \ldots, b_{t-1})$$

Es gelten für diese Grössen $t_i = p_{k_i q_i}$, wie leicht zu sehen, die Ungleichheiten:

$$p_{k_i q_i} < p_{k_j q_j},$$

wenn $k_i < k_j$ oder $q_i < q_j$.

Greifen wir jetzt ein beliebiges p_{kq} aus der Reihe p_{kq} heraus, für welches $k > k_i$ oder $q > q_i$ ist, so haben wir

$$k > a_{t_i} = k_i \geqq (a_0, a_1, \ldots)$$
$$q > b_{t_i} = q_i \geqq (b_0, b_1, \ldots,)$$

Wir sehen, dass sich nur die $p_{k_i q_i}$ direkt bestimmen lassen, für welche die Ungleichheiten gelten:

$$p_{k_i q_i} < (p_{k,q}) \text{ für } k > k_i \text{ oder } q > q_i .$$

Bilden wir aus den Grössen p_{kq} ein viereckiges System:

$$\begin{array}{llll} p_{01} & p_{02} \dots & p_{0i} \dots \\ p_{11} & p_{12} \dots & p_{1i} \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{j1} & p_{j2} \dots & p_{ji} \dots \\ \dots & \dots & \dots , \end{array}$$

so sind die $p_{k_i q_i}$ nichts anderes, als die Hauptzahlen der Reihen und zugleich der Zeilen dieses Systemes. Wir wollen sie nun Hauptzahlen der Gleichung $M = 0$ nennen und alle Gleichungen $F(y, u) = 0$, für welche die Hauptzahlen der Grösse und den Indices nach gleich sind, in eine und dieselbe Klasse, welche wir symbolisch etwa mit $(p_{k_i q_i})$ $(k_0 = q_0 = n)$ bezeichnen, zusammenfassen; und wenn wir noch die Begriffe der Hauptzahlen, ihrer Indices und der dadurch definierten Klassen auch auf die Differentialgleichungen (mittels ihrer Gefährtinnen) übertragen, so folgt aus dem Satze K der folgende, welcher den Satz G in sich einschliesst:

L. „Eine rationale Differentialgleichung ist auf eine gleichartige Differentialgleichung von der Form $y^\nu - R = 0$, worin R einen Differentialausdruck höchstens vom Grade $\nu - 1$ bedeutet, nur reduktibel, insofern die Funktionalgleichungen der durch ihre Gefährtin definierten Klasse reduktibel sind."

Die Reduktibilitätskriterien für eine Funktionalgleichung

$$\Sigma P_{kq}\, y^k u^q = 0$$

vom Grade ν in y, μ in u lassen sich nach der oben für die Funktionalgleichungen mit einer Unbekannten y auseinandergesetzten Methode ableiten, wenn man in die Gleichung statt u eine beliebige in x rationale, in y ganze Funktion einsetzt und die Gleichung sodann nach Potenzen von y entwickelt; sollen aber die erhaltenen Kriterien für

die ganze durch die vorgelegte Gleichung definierte Klasse gelten, so darf man nur von solchen Substitutionen

$$u = R(x, y)$$

Gebrauch machen, bei deren Anwendung die Hauptzahlen der dadurch entstandenen Gleichungen nur von den Hauptzahlen der primären Gleichung abhängige Funktionen sind. So darf man immer $u = 0$ oder $u =$ konst. setzen.

Haben wir z. B. die Gleichung

$$A_1 x^6 y''' y' + A_2 x^7 y'^2 + A_3 x^5 y + A_4 = 0,$$

worin A_i Konstanten oder allgemeiner Einheiten des funktionentheoretischen Körpers $\Omega(x)$ bedeuten, und bilden wir durch Einsetzen von $x^k y^{(k)} = y u^k$ ihre Gefährtin, welche lautet:

$$A_1 x^3 y^2 u^4 + A_2 x^5 y^2 u^2 + A_3 x^5 y + A_4 = 0,$$

ordnen dieselbe nach Potenzen von y:

$$x^3 y^2 (A_1 u^4 + A_2 x^2 u^2) + A_3 x^5 y + A_4 = 0,$$

und setzen $u =$ konst., und zwar so, dass

$$A_1 u^4 + A_2 x^2 u^2 \neq 0$$

wird, so gelangen wir, da die erhaltene Gleichung in y von der Hauptklasse $\left(\frac{3}{2}\right)^1$, also irreduktibel ist, zu dem folgenden Schluss:

„Die Differentialgleichung

$$A_1 x^6 y''' y' + A_2 x^7 y'^2 + A_3 x^5 y + A_4 = 0$$

ist auf keine gleichartige Differentialgleichung von der Form

$$y^\nu = R,$$

worin $\nu \leqslant 3$, reduktibel."

Lebenslauf.

Ich bin am 24. Juni 1877 zu Tiflis geboren. Meine Eltern waren russische Armenier. Von 1886 bis 1890 besuchte ich das erste klassische Tifliser Gymnasium; dann wurde ich nach dem Tode meines Vaters nach Odessa geschickt, wo ich das klassische Richelieu-Gymnasium bezog. 1893 kehrte ich wieder nach Tiflis zurück und bestand ein Jahr darauf an dem schon erwähnten ersten Gymnasium mit 18 Jahren meine Maturitätsprüfung als Extern. Sodann wurde ich Student der Medizin in Moskau. Während der Studentenunruhen von 1896 ward ich relegiert und genötigt, ins Ausland zu reisen, um meine Studien fortsetzen zu können. Ich kam nach Heidelberg und hier entschloss ich mich, dem inneren Triebe folgend, den ich schon in Moskau mit Mühe unterdrückte, die Medizin aufzugeben und mich der Mathematik zuzuwenden. So immatrikulierte ich mich an der naturwissenschaftlich-mathematischen Fakultät der Ruprecht-Karls-Universität zu Heidelberg und nach vierjährigem Studium promovierte ich und bestand am 27. Februar 1901 mein Doktorexamen, indem ich Mathematik als Hauptfach und Physik und Mechanik als Nebenfächer wählte.